Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°2 - A remettre le mardi 20 septembre 2011

« Inégalité de Hölder - Équation différentielle linéaire d'ordre 1 »

EXERCICE

Dans tout le problème p désigne un réel strictement supérieur à 1 et on note q le réel tel que : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

1.a. Soit m un réel positif et u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $u(x)=mx-\frac{x^p}{p}$
Montrer que le maximum de u est de la forme : $C\,m^q$, où C est une constante que l'on déterminera.

1.b. En déduire que, pour tout couple (x,y) de réels positifs, on a l'inégalité : $xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$et que, pour tout réel λ strictement positif, on a aussi l'inégalité : $xy\leq\frac{\lambda^p x^p}{p}+\frac{y^q}{q\lambda^q}$

1.c. Soit n un entier naturel non nul et $(x_1,\,x_2,\cdots,x_n)$, $(y_1,\,y_2,\cdots,y_n)$ deux éléments de $(\mathbb{R}^+)^n$.
Justifier, pour tout réel λ strictement positif, l'inégalité : $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,y_i\leq\frac{\lambda^p}{p}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p+\frac{1}{q\lambda^q}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q$

2.a. Soient a et b deux réels strictement positifs.
Déterminer le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $v(x)=a\frac{x^p}{p}+\frac{b}{qx^q}$

2.b. En déduire pour tout couple de n-uplets de réels positifs $(x_1,\,x_2,\cdots,x_n)$, $(y_1,\,y_2,\cdots,y_n)$ l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

PROBLEME

Partie A

1. Rappeler les domaines de définition, de continuité, de dérivabilité de la fonction arcsin.
2. Montrer que pour tout x réel du segment $[0,1]$

$$\arcsin(x)+\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Partie B

1. On pose $I_1=[-1,0[\cup]0,1]$ et on considère l'application h de I_1 dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin(x)$$

   (a) Montrer que h est une fonction impaire et continue.
   (b) Montrer que h est dérivable sur l'intérieur de I_1. Calculer $h'(x)$. Montrer que h est dérivable en 1. En déduire la dérivabilité de h sur I_1.
   (c) Déduire de B.1b que, pour tout $x\in I_1$: $x\left(\frac{\pi}{2}-h(x)\right)\leq 0$

2. On pose $I_2=\,]-1,1[$ et on considère l'application f de I_2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right)$$

   (a) Montrer que f est une fonction continue et dérivable sur I_2. Calculer $f'(x)$.
   Déduire le signe de $f'(x)$ à l'aide de la question B.1c.
   (b) Calculer, si elles existent, les limites suivantes lorsque x tend vers 1 :

$$\lim_{x\to1}f(x)\ \text{ et }\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}$$

   Étudier les variations de f.
   (c) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$; les axes sont notés $x'Ox$ et $y'Oy$. Tracer dans le plan $(\mathcal{P})$ la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f.
   (d) On désigne par $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[-1,+1]$. Montrer que $\widetilde{f}$ est l'unique solution sur $[-1,+1]$ de l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)y'+xy=1$.