Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°13 - A remettre le mardi 24 janvier 2012

« Matrices à paramètre - inversibilité - Diagonalisabilité »

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier fixé supérieur ou égal à trois. Considérons pour $m \in \mathbb{R}$, la matrice réelle carrée d'ordre n $A(m)$ définie ainsi :

$$A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -m & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -m & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

1. **Étude de l'inversibilité de $A(m)$ pour $|m| \geq 2$.**
   (a) Dans cette question, on suppose qu'il existe un vecteur colonne X non nul tel que
   $$A(m)X = 0$$
   Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ce vecteur et désignons par i le plus petit entier de $[\![1, n]\!]$ tel que
   $$|x_i| = \max\{|x_k| \,/ k \in [\![1, n]\!]\}$$
   i. Si $i = 1$, montrer que $|m| \leq 1$.
   ii. Si $i = n$, montrer que $|m| < 1$.
   iii. Si $i \in [\![2, n]\!]$, montrer que $|m| < 2$.
   (b) En déduire que si $|m| \geq 2$, alors la matrice $A(m)$ est inversible.

2. **Étude de l'inversibilité de $A(m)$ pour $|m| < 2$.**
   Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \sin(2\theta) \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}$. On note également pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$.
   (a) Calculer le vecteur colonne $A(2\cos(\theta))S_\theta$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice $A(2\cos(\theta_k))$ n'est pas inversible.
   (c) En déduire les valeurs propres de $A(0)$.
   (d) En remarquant que $A(m) = A(0) - m\,\mathrm{id}_n$, justifier qu'il existe exactement n valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice $A(m)$ n'est pas inversible.

3. **Diagonalisation de la matrice $A(m)$.**
   (a) Montrer que $A(0)$ est diagonalisable et donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A(0) = PDP^{-1}$.
   (b) Montrer que $A(m)$ est diagonalisable et préciser une matrice diagonale semblable à $A(m)$.