Corrigé du devoir maison

Exercice

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -6 & -12 & -18 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. On constate que A^2 est de rang 1, en effet toutes les colonnes de la matrice sont proportionnelles : $C_4 = C_1,\ C_2 = 2\,C_1$ et $C_3 = 3\,C_1$; donc $\mathrm{Im}\big(f^2\big)$ est engendré par $f^2(\vec{e}_1)$ par exemple :

$$\boxed{\mathrm{Im}\big(f^2\big) = \mathrm{Vect}\langle\, 3\,\vec{e}_1 - 6\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 6\,\vec{e}_4\,\rangle}$$

   $\mathrm{Ker}\big(f^2\big)$ est donc de dimension 3 ; les relations observées sur les colonnes de A^2 entrainent que $\vec{e}_1 - \vec{e}_4,\ 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ appartiennent au noyau de f^2.
   On vérifie que ces 3 vecteurs forment une famille libre, et donc une base de $\mathrm{Ker}\big(f^2\big)$, pour cela on résout : $\alpha\,(\vec{e}_1 - \vec{e}_4) + \beta\,\big(2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\big) + \gamma\,\big(3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3\big) = \vec{0}$, avec $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
   On obtient $(\alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma)\,\vec{e}_1 - \beta\,\vec{e}_2 - \gamma\,\vec{e}_3 - \alpha\,\vec{e}_4 = \vec{0}$, dont l'unique solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\big(f^2\big) = \mathrm{Vect}\langle\, \vec{e}_1 - \vec{e}_4\,,\ 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\,,\ 3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3\,\rangle}$$

3. Un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}\big(f\big)$ est par exemple :
   $\left\{\begin{array}{rcl} y + \ \ t & = & 0 \\ x + y + 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$ donc un vecteur $\vec{\ell}$ possible est $\vec{\ell} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_4$.
   La famille $\langle \vec{\ell}, f^2(\vec{e}_1)\rangle$ est libre puisque $\vec{\ell}$ et $f^2(\vec{e}_1)$ ne sont pas colinéaires, de plus $f(\vec{e}_1) \notin \mathrm{Ker}(f)$ donc $\notin \mathrm{Vect}\langle \vec{\ell}, f^2(\vec{e}_1)\rangle$ et par conséquent la famille $\langle f(\vec{e}_1), \vec{\ell}, f^2(\vec{e}_1)\rangle$ est libre aussi.
   Enfin cette famille est une base de $\mathrm{Ker}\big(f^2\big)$ (puisque ses trois vecteurs appartiennent à $\mathrm{Ker}\big(f^2\big)$ et que cet espace est de dimension 3), bien sûr $\vec{e}_1 \notin \mathrm{Ker}(f^2)$, on en déduit alors que la famille $\langle \vec{e}_1, f(\vec{e}_1), \vec{\ell}, f^2(\vec{e}_1)\rangle$ est libre et que c'est une base de E.

4. $f(\vec{e}_1)$ et $f^2(\vec{e}_1)$ appartiennent bien sûr à $\mathrm{Im}(f)$, et comme la famille $\langle\, f(\vec{e}_1)\,,\ f^2(\vec{e}_1)\,\rangle$ est une sous-famille d'une base, elle est libre. On connait la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, qui est égale au cardinal de cette famille, on peut donc affirmer que $\langle\, f(\vec{e}_1)\,,\ f^2(\vec{e}_1)\,\rangle$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   $f^2(\vec{e}_1) \in \mathrm{Ker}(f)$ puisque $f^3 = \theta$, $\vec{\ell} \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après le calcul de la question 3 ; la famille $\langle\, f^2(\vec{e}_1)\,, \vec{\ell}\rangle$ est libre en tant que sous-famille d'une base, son cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, c'en est donc une base.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\langle\, f(\vec{e}_1)\,,\ f^2(\vec{e}_1)\,\rangle, \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\langle\, f^2(\vec{e}_1)\,, \vec{\ell}\rangle}$$

5. On a $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 3\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\,\vec{e}_4,\ f^2(\vec{e}_1) = 3\,\vec{e}_1 - 6\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 6\,\vec{e}_4,\ \vec{\ell} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_4$, donc la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

6. $P^{-1}\,A\,P$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, on a donc $P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problème

1. (a) $\mathbb{F}_\alpha$ est un sous-ensemble de $\mathbb{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, non vide car la fonction nulle appartient à $\mathbb{F}_\alpha$ (en prenant $P = Q = 0$). Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{F}_\alpha$ et λ un réel quelconque :
$f \in \mathbb{F}_\alpha$ donc il existe deux polynômes $P_1,\ Q_1$, de degrés inférieurs ou égaux à 1 tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P_1(x)\,\mathrm{e}^{\alpha\,x} + Q_1(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$; de même $g \in \mathbb{F}_\alpha$, donc il existe deux polynômes $P_2,\ Q_2$, de degrés inférieurs ou égaux à 1 tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = P_2(x)\,\mathrm{e}^{\alpha\,x} + Q_2(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\lambda\, f(x)+g(x)\big) = \big(\lambda\, P_1(x)+P_2(x)\,\big)\mathrm{e}^{\alpha\,x}+\big(\lambda\, Q_1(x)+Q_2(x)\big)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$; $\lambda\, P_1+P_2$ et $\lambda\, Q_1+Q_2$ sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1, donc la fonction $\lambda\, f + g$ est bien une fonction appartenant à $\mathbb{F}_\alpha$; $\mathbb{F}_\alpha$ est inclus dans $\mathbb{E}$, non vide et stable par combinaison linéaire, donc :

$$\boxed{\mathbb{F}_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{E}}$$

   (b) Tout d'abord on vérifie que les 4 fonctions sont bien éléments de $\mathbb{F}_\alpha$: les polynômes P et Q sont 1 et 0 pour f_1, X et 0 pour f_2 etc...
Soit f un élément de $\mathbb{F}_\alpha$, P et Q des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 1 associés à f ; il existe 4 réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = b + a\,x$ et $Q(x) = c + d\,x$. Par conséquent f peut s'écrire : $f = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 + d\,f_4$; la famille $\big(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\big)$ engendre donc $\mathbb{F}_\alpha$. Montrons à présent qu'elle est libre : on résout $a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 + d\,f_4 = 0$, où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des réels quelconques :
$a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 + d\,f_4 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{\alpha\,x} + b\,x\,\mathrm{e}^{\alpha\,x} + c\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x} + d\,x\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x} = 0.$
Comme $\mathrm{e}^{\alpha\,x}$ n'est jamais nul, on a aussi en divisant par $\mathrm{e}^{\alpha\,x}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ a + b\,x + c\,\mathrm{e}^{-2\alpha\,x} + d\,x\,\mathrm{e}^{-2\alpha\,x} = 0$; et de même en divisant par $\mathrm{e}^{-\alpha\,x}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{2\alpha\,x} + b\,x\,\mathrm{e}^{2\alpha\,x} + c + d\,x = 0.$
En écrivant que la première équation est vérifiée entre autres pour $x = 0$, on obtient : $a + c = 0$; en faisant tendre x vers $+\infty$ dans la deuxième, on obtient $b = 0$ (car si $b \neq 0$ alors la limite est infinie ce qui contredit le fait que l'expression est nulle pour tout x) et en faisant tendre x vers $-\infty$ dans la troisième, on obtient $d = 0$.
En reportant dans l'équation de départ, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{\alpha\,x} - a\,\mathrm{e}^{-\alpha\,x} = 0$, puis en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\,a\big(\mathrm{e}^{\alpha\,x} + \mathrm{e}^{-\alpha\,x}\big) = 0$. En prenant à nouveau $x = 0$, on obtient $a = 0$ (puisque α n'est pas nul).
Finalement, $a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 + d\,f_4 = 0 \iff a = b = c = d = 0$ donc la famille est libre, elle est de cardinal 4, donc :

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est une base de } \mathbb{F}_\alpha}$$

2. (a) La dérivée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc si $f \in \mathbb{E}$, alors $D(f) \in \mathbb{E}$. D'autre part, pour toutes fonctions f et g dérivables (donc aussi pour des fonctions de $\mathbb{E}$) et pour tout réel λ, on a $\lambda\, f + g$ est dérivable et $(\lambda\, f + g)' = \lambda\, f' + g'$; ainsi $D(\lambda\, f + g) = \lambda\, D(f) + D(g)$; D est donc un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
Noyau de D : $D(f) = 0 \iff f$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}\langle\, 1\,\rangle$.
Image de D : Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (théorème de Darboux) ; donc toute fonction de $\mathbb{E}$ a comme antécédent par D l'une de ses primitives. On en déduit que D est surjective, c'est à dire $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{E}$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}\langle\, 1\,\rangle\ ,\ \mathrm{Im}(D) = \mathbb{E}}$$

   (b) La linéarité de D_α est induite par celle de D ; il suffit donc de vérifier que toute fonction de F_α a pour image par D_α une fonction de F_α : $D_\alpha(f_1) = f_1' = \alpha\, f_1 \in F_\alpha$; de même $f_2' = f_1 + \alpha\, f_2,\ f_3' = -\alpha\, f_3$ et $f_4' = f_3 - \alpha\, f_4$. Les 4 vecteurs de base de F_α ont leurs images dans F_α, donc par linéarité de D_α, l'image de toute fonction de F_α appartient à D_α ; D_α est donc un endomorphisme de F_α.

   (c) On a calculé les images de $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ par D_α, la matrice de D_α dans cette base est donc :

$$\boxed{M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}}$$

   (d) M_α est une matrice triangulaire, sans coefficient nul sur la diagonale, elle est donc inversible.

3. La matrice de $D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha$ est égale à $\begin{pmatrix} \alpha^2-\lambda & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\lambda & -2\alpha \\ & 0 & 0 & \alpha^2-\lambda \end{pmatrix}$.

   C'est une matrice triangulaire, donc si $\lambda \neq \alpha^2$, ces coefficients diagonaux sont tous non nuls et elle est inversible, donc l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha$ est de rang 4 ; si $\lambda = \alpha^2$, la matrice est de rang 2 (deux colonnes nulles et les deux autres non colinéaires).

$$\boxed{D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha \text{ est de rang } 4 \iff \lambda \neq \alpha^2\,;\ D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha \text{ est de rang } 2}$$

4. (a) On a de façon immédiate que f_1 et f_3 appartiennent à $\mathrm{Ker}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$ (les colonnes correspondantes de la matrice sont nulles) et comme $D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha$ est de rang 2, son noyau est de dimension $4-2=2$. La famille (f_1, f_3) est libre (en tant que sous-famille d'une base), c'est donc une base de $\ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$.
   D'autre part on constate que $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f_2) = 2\,\alpha\,f_1$, $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f_4) = -2\,\alpha\,f_3$, donc f_1 et f_3 appartiennent à $\mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$ (avec comme antécédents respectifs $\frac{1}{\alpha}\,f_2$ et $\frac{-1}{\alpha}\,f_4$ par exemple). (f_1, f_3) est une famille libre de $\mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$, qui est justement de dimension 2 ; c'en est donc une base.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,\big(D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha\big) = \mathrm{Vect}\langle f_1, f_3\rangle = \mathrm{Im}\,\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)}$$

   (b) Soit $f \in \mathbb{F}_\alpha$:
   $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f) \in \mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$, et comme le noyau et l'image sont égaux,
   $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f) \in \ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$; par conséquent $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2(f) = 0$.

$$\boxed{\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2 \text{ est donc l'endomorphime nul de } \mathbb{F}_\alpha}$$

   (c) $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2 = D_\alpha^4 - 2\,\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^4 \mathrm{Id}_\alpha = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{F}_\alpha)}$, donc :
   $D_\alpha \circ \left(\dfrac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}\right) = \left(\dfrac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}\right) \circ D_\alpha = \mathrm{Id}_\alpha$, ainsi :

$$\boxed{D_\alpha^{-1} = \frac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}}$$

5. (a) On a une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants ; l'équation caractéristique associée est $x^2 - \alpha^2 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes α et $-\alpha$. L'ensemble des solutions est constitué des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha x} + B\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques. On remarque que f_1 et f_3 sont solutions de cette équation, et que toute solution s'exprime comme combinaison linéaire de f_1 et f_3. En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation différentielle, on a donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\ f_3\,\rangle}$$

   (b) $f \in \mathrm{Ker}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big) \iff f \in \mathbb{E}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle résolue à la question précédente. Comme toutes les solutions de cette équation différentielle sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est à dire appartiennent à $\mathbb{E}$, on en déduit $\boxed{\mathrm{Ker}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big) = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\ f_3\,\rangle}$

   (c) Soit $f \in \mathbb{E} : f \in \mathrm{Ker}\Big(\big(D - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)^2\Big) \iff \big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f) \in \mathrm{Ker}\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)$, c'est à dire $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f) \in \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\ f_3\,\rangle$. Il existe donc deux constantes réelles λ_1 et λ_3 telles que $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f) = \lambda_1\,f_1 + \lambda_3\,f_3$.
   On a calculé précédemment $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f_2) = 2\,\alpha\,f_1$ et $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f_4) = -2\,\alpha\,f_3$, donc
   $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(g) = \big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)(f) - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha} \times 2\,\alpha\,f_1 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha} \times (-2\,\alpha\,f_3) = 0.$
   En résumé, si $f \in \mathrm{Ker}\Big(\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)^2\Big)$ alors $\exists(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha}\,f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha}\,f_4 \in \mathrm{Ker}\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)$, ou encore $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha}\,f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha}\,f_4 \in \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\ f_3\,\rangle$. Il existe donc des constantes réelles μ_1 et μ_3 telles que $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha}\,f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha}\,f_4 = \mu_1\,f_1 + \mu_3\,f_3$. On peut alors poser $\mu_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha}$ et $\mu_4 = -\dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha}$ et on obtient : $\mathrm{Ker}\Big(\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)^2\Big) \subset \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\ f_2\,,\ f_3\,,\ f_4\,\rangle = \mathbb{F}_\alpha$

Réciproquement, si $f \in \mathbb{F}_\alpha$, alors $\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)^2(f) = \big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2(f) = 0$ (d'après la question 4b) donc $f \in \mathrm{Ker}\Big(\big(D^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}\big)^2\Big)$; finalement :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\Big(\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2\Big) = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\, f_2\,,\, f_3\,,\, f_4\,\rangle = \mathbb{F}_\alpha}$$

6. On remarque que $f \in \mathrm{Ker}\Big(\big(D_\alpha^2 -_\alpha^2 \mathrm{Id}\big)^2\Big) \iff f^{(4)} - 2\,\alpha^2 f'' + \alpha^4 f = 0 \iff f$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 4 proposée. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc $\mathbb{F}_\alpha$.
7. (a) Supposons que $\mathscr{E}$ possède une solution polynômiale f_0 et cherchons son degré ; les dérivées successives de f_0 sont de degré strictement inférieur à f_0 (sauf si $f_0 = 0$ ce qui n'est pas) donc le degré de f_0 est égal au degré de $x^3 - 12\,x + 2$, c'est à dire 3. On pose alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d,\ f_0^{(4)}$ est le polynôme nul et $f_0''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$. Donc par identification, on a : $-2\,(6\,a\,x + 2\,b) + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = x^3 - 12\,x + 2$ et on obtient $f_0(x) = x^3 + 2$.

   (b) Soit f une solution quelconque de $\mathscr{E}$; alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) - 2\,f''(x) + f(x) = x^3 - 12\,x + 2$. Or f_0 est solution de $\mathscr{E}$ donc on a aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0^{(4)}(x) - 2\,f_0''(x) + f_0(x) = x^3 - 12\,x + 2$. En soustrayant membre à membre : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f - f_0)^{(4)}(x) - 2\,(f - f_0)''(x) + (f - f_0)(x) = 0$ Ainsi $f - f_0$ est solution de l'équation sans second membre, résolue à la question 6, donc $f - f_0 \in \mathrm{Ker}\Big(\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)^2\Big)$. Il existe donc 4 constantes réelles, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ telles que $f - f_0 = \lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2 + \lambda_3\,f_3 + \lambda_4\,f_4$, avec $\alpha = 1$.

   Réciproquement, soit $f = f_0 + \lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2 + \lambda_3\,f_3 + \lambda_4\,f_4$, où $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ sont des constantes réelles quelconques : $\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f) =$
   $\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_0) + \lambda_1\,\underbrace{\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_1)}_{0} + \lambda_2\,\underbrace{\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_2)}_{2\,f_1} + \lambda_3\,\underbrace{\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_3)}_{0} + \lambda_4\,\underbrace{\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_4)}_{-2\,f_3}$ d'où
   $\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)^2(f) = \big(D^2 - \mathrm{Id}\big)^2(f_0) + 2\,\lambda_2\,\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_1) - 2\,\lambda_4\,\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)(f_3) = \big(D^2 - \mathrm{Id}\big)^2(f_0)$.
   Or $\big(D^2 - \mathrm{Id}\big)^2(f_0)$ est la fonction polynôme $x \mapsto x^3 - 12\,x + 2$, donc f est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$. En conclusion

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les solutions de } \mathscr{E} \text{ sont toutes les fonctions définies sur } \mathbb{R} \text{ par} \\ x \longmapsto x^3 + 2 + \lambda_1\,\mathrm{e}^x + \lambda_2\,x\,\mathrm{e}^x + \lambda_3\,\mathrm{e}^{-x} + \lambda_4\,x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \text{où } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4 \text{ sont des constantes réelles quelconques.}\end{array}}$$