Devoir surveillé 5

le samedi 18 février

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

La partie B utilise le résultat de la question 5.(b).ii de la partie A.

Le but de ce problème est la modélisation du passage des bus à un arrêt.

λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire à densité X suit la loi exponentielle de paramètre λ si, et seulement si, une de ses densités est la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda : x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

PARTIE A : étude d'un premier exemple

1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$
   (a) En utilisant $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :
   $$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$
   En déduire que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge.
2. (a) Calculer $\Gamma(1)$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. Soit U une variable aléatoire réelle, et soit n un entier naturel strictement positif (on rappelle que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). On dit que U **suit une loi gamma de paramètres n et λ** si et seulement si U est une variable aléatoire dont une densité est donnée par la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par :
   $$\varphi_{n,\lambda} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
   On note alors $U \hookrightarrow \gamma(n, \lambda)$.

(a) Vérifier que la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ ainsi définie est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit U une variable aléatoire de loi $\gamma_{n,\lambda}$.

Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

4. Soit un réel $x > 0$. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$I(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(x-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$

(a) Calculer $I(1, q)$.

(b) Pour $p \geqslant 2$, calculer $I(p, q)$ en fonction de p, q et $I(p-1, q+1)$.

(c) En déduire que $I(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}$

5. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On considère deux variables aléatoires X_p et X_q, indépendantes de lois respectives $\gamma(p, \lambda)$ et $\gamma(q, \lambda)$.

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités de probabilité respectives g et h définies sur $\mathbb{R}$, alors $X + Y$ admet pour densité la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\theta : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $X_p + X_q \hookrightarrow \gamma(p+q, \lambda)$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n variables aléatoires mutuellement indépendantes $(U_1, \ldots, U_n)$ de même loi exponentielle de paramètre λ.

i. Vérifier que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi γ dont on précisera les paramètres.

ii. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ est une variable aléatoire de loi $\gamma(n, \lambda)$.

PARTIE B : modélisation du passage des bus

On s'intéresse aux instants de passage successifs des bus à un arrêt donné. Dans cette modélisation, le passage d'un bus à l'arrêt est considéré comme instantané (le bus arrive et repart au même instant).

Le service commence à l'instant T_0. Le premier bus du matin passe à l'instant T_1. On pose $U_1 = T_1 - T_0$ qui représente donc le temps entre l'ouverture du service et le passage du premier bus de la journée. Le temps écoulé entre les passages du premier et du second bus de la journée est modélisé par une variable aléatoire U_2. T_2 désigne l'instant auquel ce second bus arrive ; on a donc $U_2 = T_2 - T_1$. Le bus suivant passe ensuite à l'instant T_3 au bout d'un temps U_3, et ainsi de suite ... Pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_n désigne l'instant où le n-ème bus arrive à l'arrêt et U_{n+1} le temps écoulé entre les passages du n-ème bus et du $(n+1)$-ème bus de la journée.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$.

Dans cette partie et la suivante, on suppose les variables T_n et U_n définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que les variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$ sont mutuellement indépendantes. On suppose de plus qu'elles suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose $T_0 = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $T_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

On définit enfin la fonction de comptage N de la façon suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t est le nombre de bus qui sont passés à l'arrêt dans l'intervalle $[0, t]$.

1. Simulation du modèle.
   (a) i. Soient V une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. Montrer que la variable $E = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(V)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   ii. En déduire une fonction `EXPO(lamb)` en Python qui a pour paramètres d'entrée `lamb` (le paramètre λ), et qui renvoie aléatoirement une valeur de E.
   (b) Utiliser la question (a).ii pour élaborer une fonction `TEMPS(lamb,n)` qui a pour paramètres d'entrée `lamb` (le paramètre λ des lois exponentielles U_k) et `n` le nombre de bus passés, et qui renvoie le temps de passage du n-ème bus.

(c) Elaborer une fonction `TRAFIC(lamb,t)` qui a pour paramètres d'entrée `lamb` (le paramètre λ des lois exponentielles U_k) et `t` un réel strictement positif, et qui renvoie le nombre de bus passés dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

2. On cherche d'abord à se faire une idée des propriétés élémentaires du modèle.

   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

      i. Montrer que l'événement $[N_t = 0]$ est réalisé si, et seulement si, l'événement $[t < T_1]$ est réalisé.

      ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'événement $[N_t = n]$ est réalisé si, et seulement si, l'événement $[T_n \leq t < T_{n+1}]$ est réalisé.

   (b) Tracer le graphe de la fonction $t \longmapsto N_t$ pour $0 \leq t \leq 3.5$ lorsque : U_1 vaut 1, U_2 vaut 0.5, U_3 vaut 1.5, U_4 vaut 0.25 et U_5 vaut 1.

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admettra que N_t est une variable aléatoire réelle discrète et on s'intéresse ici à sa loi.

   (a) Donner la loi de T_n.

   (b) Montrer que l'événement $[N_t \geq n]$ est réalisé si, et seulement si, l'événement $[T_n \leq t]$ est réalisé. En déduire une expression de $P(N_t \geq n)$ utilisant une intégrale.

   (c) En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

   indication : on pourra dériver la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^n}{n!} e^{-\lambda x}$

4. On suppose que les bus de la ligne passant à l'arrêt considéré peuvent avoir deux terminus A et B différents. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note A_t (respectivement B_t) le nombre de bus allant au terminus A (respectivement au terminus B) qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t. N_t désigne comme ci-dessus le nombre total de bus, tous terminus confondus. On a donc $N_t = A_t + B_t$.

   Lorsqu'un bus se présente à l'arrêt, on suppose que qu'il a pour terminus A avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et B avec la probabilité $1 - p$, indépendamment des autres bus.

   (a) Soient $t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ et k entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[N_t = n]}(A_t = k)$.

   (b) En déduire la loi de A_t.