Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1 Etude générale

Une courbe paramétrée (plane) est la donnée de 2 fonctions x et y d'un même paramètre t ; la représentation graphique de la trajectoire –ensemble des positions du point M de paramètre t– n'est qu'un élément de la courbe paramétrée ; une même représentation graphique pouvant être obtenue à partir de plusieurs paramétrages.
On détermine D l'ensemble de définition commun aux fonctions x et y, puis on étudie leurs variations en fonction de t, que l'on rassemble dans un double tableau de variations.
L'étude des points remarquables et des branches infinies diffère sensiblement de celle des courbes d'équation $y = f(x)$.

2 Réduction de l'ensemble d'étude – symétries

2.1 Périodicité

Si x et y sont périodiques de période T, il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T pour avoir la trajectoire, qui sera parcourue de nouveau à chaque période.

2.2 Symétries

- ⋆ S'il existe une transformation ψ telle que $x(\psi(t))$ et $y(\psi(t))$ aient des propriétés particulières, on peut dans certains cas réduire l'ensemble d'étude, par exemple :
  - — Si $\psi : t \mapsto -t$, l'étude peut se ramener à $D \cap [0\,,+\infty[$
  - — Si $\psi : t \mapsto K - t$, l'étude peut se ramener à $D \cap [K/2\,,+\infty[$
  - — Si $\psi : t \mapsto 1/t$, l'étude peut se ramener à $D \cap ([-1\,,1] \setminus \{0\})$
  - — Cette liste n'est pas exhaustive.
- ⋆ Quelle que soit la transformation ψ considérée, il peut en résulter certaines symétries :
  - — Si $x \circ \psi(t) = x(t)$ et $y \circ \psi(t) = y(t)$, les points $M(t)$ et $M(\psi(t))$ sont les mêmes, la courbe est parcourue une deuxième fois –dans le même sens ou en sens inverse– selon que ψ est croissante ou décroissante.
  - — Si $x \circ \psi(t) = x(t)$ et $y \circ \psi(t) = -y(t)$, les points $M(t)$ et $M(\psi(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
  - — De même, si $x \circ \psi(t) = -x(t)$ et $y \circ \psi(t) = y(t)$, les points $M(t)$ et $M(\psi(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
  - — Si $x \circ \psi(t) = -x(t)$ et $y \circ \psi(t) = -y(t)$, les points $M(t)$ et $M(\psi(t))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
  - — Si $x \circ \psi(t) = y(t)$ et $y \circ \psi(t) = x(t)$, les points $M(t)$ et $M(\psi(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
  - — On peut avoir bien d'autres symétries, par exemple lorsque $x \circ \psi(t) = K - x(t)$ et $y \circ \psi(t) = Q - y(t)$ (symétrie par rapport au point de coordonnées $(K/2, Q/2)$), des rotations ($x \circ \psi(t) = -y(t)$ et $y \circ \psi(t) = x(t)$ par exemple), des translations...

Les points qui suivent ne sont pas explicitement au programme (donc pas de résultats à connaître) mais si on vous guide, on peut malgré tout les aborder...

3 Points stationnaires

Définition 3.1. *Un point $M(t_0)$ est dit* stationnaire *lorsque le vecteur dérivé s'annule pour $t = t_0$. Le vecteur dérivé ne dirige plus la tangente à la courbe, qui du reste, peut ne pas exister.*

Remarque 3.2. *Un point stationnaire s'appelle également un point* singulier *; un point non stationnaire est appelé un point* régulier.

Pour étudier l'allure de la courbe localement (au voisinage de t_0), on essaie de déterminer un vecteur colinéaire au vecteur vitesse dont la limite en t_0 soit finie et non nulle. Un tel vecteur n'existe pas toujours, en particulier lorsque la courbe n'a pas de tangente en $M(t_0)$.

Il revient au même de déterminer un équivalent de $x(t) - x(t_0)$ lorsque $t \to t_0$, ainsi qu'un équivalent de $y(t) - y(t_0)$, puis de les comparer par exemple en en faisant le quotient.

Remarque 3.3. *Lorsque $M(t)$ a une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$ – c'est à dire lorsque $x(t)$ et $y(t)$ ont des limites finies en $+\infty$ ou $-\infty$ – le vecteur dérivé tend alors vers $\vec{0}$ à l'infini. Il ne s'agit pas d'un point stationnaire au sens strict puisque ∞ n'est pas un réel, mais l'étude pour déteminer la tangente éventuelle est identique.*

4 Branches infinies

Il s'agit d'étudier l'allure de la courbe lorsque x ou y a une limite infinie lorsque t tend vers t_0 (t_0 peut être un réel ou bien $\pm\infty$).

— Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$, alors la courbe admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) d'équation $x = \ell$.

— Inversement, si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} (t) = \ell \in \mathbb{R}$, alors la courbe admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = \ell$.

— Si $x(t)$ et $y(t)$ ont des limites infinies en t_0, il faut étudier la limite de y/x comme pour une courbe classique. Si cette limite est nulle (resp. infinie), on obtient une branche asymptotique parallèle à l'axe des abscisses (resp. à l'axe des ordonnées).
Si cette limite est un réel $a \neq 0$, on étudie la limite en t_0 de la différence $y(t) - a\,x(t)$. Si cette limite est finie ($b \in \mathbb{R}$), on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ et si cette limite est infinie, une branche asymptotique oblique de pente a.
Dans le cas d'une asymptote oblique, on détermine le signe de la différence $y(t) - [a\,x(t) + b]$ pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

— Il existe bien d'autres courbes asymptotes possibles.

5 Points doubles

Définition 5.1. *$D \in \mathcal{P}$ est un* point multiple *de $(\mathcal{C})$ s'il existe au moins deux valeurs* distinctes *t_1 et t_2 du paramètre pour lesquelles $M(t_1) = M(t_2) = D$.*

Aucun résultat général n'est à connaître, sauf la définition tout de même. En général les vecteurs dérivés ne sont pas les mêmes aux points de paramètres t_1 et t_2.
Toutefois, lorsqu'on résout $x(t_2) - x(t_1) = 0$ et $y(t_2) - y(t_1) = 0$, une solution évidente est toujours $t_1 = t_2$, on peut donc parfois factoriser par $t_2 - t_1$ (en particulier dans le cas de fractions rationnelles).