2 B.C.P.S.T – VÉTO 2 | **Probabilités discrètes** | Mercredi 18 novembre 2015

1. On lance trois dés strictement identiques. Quelle est la probabilité pour que la somme des trois numéros obtenus soit égale à 12 ?
2. On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ qui contiennent chacune 3 boules. Toutes les boules sont blanches, sauf une qui est rouge. On ne sait pas dans quelle urne se trouve la boule rouge. On tire sans remise deux boules de U_1.
   (a) Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?
   (b) Sachant que les deux boules tirées sont blanches :
      i. Quelle est la probabilité que U_1 contienne la boule rouge ?
      ii. Quelle est la probabilité que U_2 contienne la boule rouge ?
3. On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
   (b) Sachant que la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans U_n ?
4. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge, et en ne la remettant pas si elle est blanche. On considère les événements suivants :
   A : « On obtient exactement une boule blanche en n tirages. »
   B_k : « On obtient une boule blanche au k-ième tirage. » $(k \geqslant 1)$
   R_k : « On obtient une boule rouge au k-ième tirage. » $(k \geqslant 1)$
   (a) Exprimer l'événement A en fonction des B_k et R_k $(k \geqslant 1)$.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement A.
5. On dispose de deux urnes : l'urne U contient 1 boule blanche et 4 boules noires, l'urne V contient 3 boules blanches et 2 boules noires. Dans l'une de ces urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ayant lieu dans la même urne).
   Soit A_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche".
   (a) Calculer $P(A_1)$ et $P(A_2)$. A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
   (b) Calculer $P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Sachant que les $(n-1)$ premiers tirages donnent chacun une boule blanche, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche supplémentaire au tirage suivant ?
   (d) Sachant que les n premières boules tirées sont blanches, quelle est la probabilité de les avoir tirées dans l'urne U ?
6. On range au hasard p livres $L_1, L_2, \ldots, L_p$ dans n tiroirs $T_1, T_2, \ldots, T_n$.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un tiroir donné T_i reste vide ?
   (b) Quelle est la probabilité que k tiroirs donnés $T_{i_1}, T_{i_2}, \ldots, T_{i_k}$ restent vides ?
   (c) Quelle est la probabilité $s(p,n)$ qu'aucun tiroir ne reste vide ?
7. Ernest a perdu son téléphone portable. Il se trouve avec la probabilité p $(p \in]0,1[)$ chez l'un de ses sept amis. Il a déjà téléphoné a six amis, mais son portable n'est pas chez eux. Quelle est la probabilité qu'il soit chez son septième ami ? (On admettra qu'il n'y a pas à priori d'ami privilégié !).
8. Dans un village africain, 25% des habitants sont vaccinés contre les piqûres de la mouche tsé-tsé. Parmi les vaccinés, il y a malgré tout $\frac{1}{12}$ de malades, et parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
9. Soient $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et A, B, C, D quatre événements tels que :
   $$A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont 2 à 2 disjoints} \qquad p(A) = p(D) = p \qquad P(B) = p(C) = \frac{1}{2} - p$$
   (a) Les événements $A \cup B$, $A \cup C$ et $A \cup D$ sont-ils deux à deux indépendants ?
   (b) Les événements $A \cup B$, $A \cup C$ et $A \cup D$ sont-ils mutuellement indépendants ?

10. On considère un microbe M pouvant occuper deux positions A et B et se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :
$\star$ La position initiale (au temps 0) du microbe M est A.
$\star$ Au temps $n \in \mathbb{N}^*$, le microbe M est soit en A, soit en B.
$\star$ Entre deux instants successifs n et $n+1$, le microbe M saute éventuellement d'une position à l'autre. Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut à l'instant n est, par ailleurs, indépendante de la position du microbe à cet instant.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n (respectivement B_n) l'évenement : « le microbe se trouve en A (respectivement en B) à l'instant n ». On pose enfin $\alpha_n = P(A_n)$ et $\beta_n = P(B_n)$. On peut donc traduire les informations précédentes par :

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = 1 \\
&\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \alpha_n + \beta_n = 1 \\
&\exists p \in]0,1[\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \begin{cases} P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) = p\alpha_n \\ P\big(B_n \cap B_{n+1}\big) = p\beta_n \end{cases}
\end{aligned}$$

(a) Calculer $P\big(B_n \cap A_{n+1}\big)$ en fonction de p et β_n.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \alpha_{n+1} = (2p-1)\alpha_n + (1-p)$.

(c) En déduire α_n et β_n en fonction de n et p.

(d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

11. Une urne contient des boules numérotées de 1 à N, $(N \geqslant 3)$. On effectue une suite de tirages avec remise et on note $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ la suite des numéros obtenus. A_n est l'événement « les n premiers tirages donnent des résultats en ordre croissant (au sens large). »

(a) Combien y a-t-il de n-uplets $(y_1, \ldots, y_n)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n \leqslant P$?

(b) En considérant les entiers $x_1,\ x_2+1, \ldots, x_n+n-1$, dénombrer les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant N$.

(c) Calculer $u_n = p(A_n)$.

(d) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{N}$, en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

(e) On pose $v_n = u_n - u_{n+1}$, montrer que $v_n = p(B_n)$ où B_n est un événement que l'on exprimera en fonction des A_k.

(f) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ et interpréter ce résultat.

12. Deux pièces de monnaie donnent pile avec les probabilités p_1 et p_2 respectivement $(0 < p_1 < 1,\ 0 < p_2 < 1)$ et face avec les probabilités $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. On choisit une pièce au hasard, on la lance. À chaque lancer, si le résultat est pile on relance la même pièce, sinon on change de pièce pour le tour suivant.
On définit les événements :
A_k : «On utilise la pièce A pour le k^{e} lancer » et
B_k : «On utilise la pièce B pour le k^{e} lancer »

(a) Quelle est la probabilité que le deuxième lancer se fasse avec la pièce A ?

(b) Sachant que le deuxième lancer est effectué avec la pièce A, quelle est la probabilité que le quatrième ait lieu avec la pièce B ?

(c) Le deuxième lancer a été fait avec la pièce A, quelle est la probabilité que le premier ait eu lieu avec la pièce B ?

(d) Calculer u_n, la probabilité que l'on joue avec la pièce A pour la première fois lors du n^{e} lancer ?

(e) Que vaut $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$? va-t-on nécessairement finir par jouer avec la pièce A ?