Transformation de LAPLACE

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Novembre 2010

Table des matières

1 Définitions **2**
- 1.1 Fonctions causales 2
- 1.2 Exemples 2
- 1.3 Transformée de LAPLACE d'une fonction causale 2

2 Transformées de LAPLACE des fonctions usuelles **2**

3 Propriétés de la transformation de LAPLACE **3**
- 3.1 Linéarité 3
- 3.2 Transformée de $t \longmapsto f(\alpha t)\mathscr{U}(t)$ avec $\alpha > 0$ 3
- 3.3 Transformée de $t \longmapsto f(t)e^{-\alpha t}\mathscr{U}(t)$ 3
- 3.4 Transformée de $t \longmapsto f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)$ 3
- 3.5 Transformée d'une fonction périodique 4
- 3.6 Transformée d'une dérivée, d'une primitive 4

4 Propriétés complémentaires **5**
- 4.1 Dérivation et intégration d'une transformée d'une LAPLACE 5
- 4.2 Impulsion unité 5

5 Original d'une fonction **5**

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Définitions

1.1 Fonctions causales

Définition 1.1.1
Une fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est une fonction* causale *si et seulement si, quel que soit* $t < 0$*,* $f(t) = 0$*.*

1.2 Exemples

Définition 1.2.1
On appelle fonction échelon unité *la fonction* $\mathscr{U}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathscr{U}(t) = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ t < 0 \\ 1 \ \textit{si}\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Propriétés

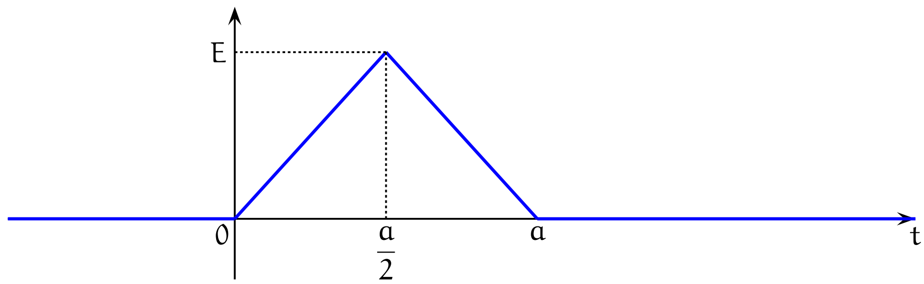
– La fonction échelon-unité est une fonction causale.
– Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ est une fonction causale.

Exemples

✏ Tracer la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = t\mathscr{U}(t) - (t-1)\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-2).$$

✏ Trouver l'expression de $f(t)$ sachant que la représentation graphique de f est :



1.3 Transformée de LAPLACE d'une fonction causale

Définition 1.3.1
Soient f *une fonction causale et* $p \in \mathbb{R}$ *tels que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ *converge. On pose :*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

F *est la* transformée de LAPLACE *de* f*. On la note* $F = \mathscr{L}(f)$*.*

2 Transformées de LAPLACE des fonctions usuelles

Certains résultats suivants seront traités en exercice.

Si $p > 0$ alors $\mathscr{L}(\mathscr{U}(t)) = \dfrac{1}{p}$, $\mathscr{L}(t\mathscr{U}(t)) = \dfrac{1}{p^2}$, $\mathscr{L}\left(t^2\mathscr{U}(t)\right) = \dfrac{2}{p^3}$ et $\mathscr{L}(t^n\mathscr{U}(t)) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Re e(p+a) > 0$ (en particulier si $a \in \mathbb{R}$ tel que $p + a > 0$) alors $\mathscr{L}\left(e^{-at}\mathscr{U}(t)\right) = \dfrac{1}{p+a}$.

Si $p > 0$ alors $\mathscr{L}(\cos\omega t\mathscr{U}(t)) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathscr{L}(\sin\omega t\mathscr{U}(t)) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

3 Propriétés de la transformation de LAPLACE

3.1 Linéarité

✏ f et g sont deux fonctions causales admettant des transformées de LAPLACE notées F et G, λ et μ sont deux nombres réels (ou complexes). Déterminer $\mathscr{L}(\lambda f + \mu g)$.

Théorème 3.1.1
Si f et g sont deux fonctions causales admettant des transformées de Laplace et si λ et μ sont deux nombres réels (ou complexes) alors :

$$\mathscr{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mu\mathscr{L}(g).$$

✏ Déterminer les transformées de $t \longmapsto (t^2+t+1)\mathscr{U}(t)$, $t \longmapsto \cos^2 t\,\mathscr{U}(t)$ et de $t \longmapsto \sin^2 t\,\mathscr{U}(t)$.

3.2 Transformée de $t \longmapsto f(\alpha t)\mathscr{U}(t)$ avec $\alpha > 0$

✏ Soit f une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE notée F et soit α un réel strictement positif. En posant $x = \alpha t$, déterminer la transformée de LAPLACE de $t \longmapsto f(\alpha t)\mathscr{U}(t)$.

Théorème 3.2.1
Si f est une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE *notée F et si α est un réel strictement positif, alors :*

$$\mathscr{L}(f(\alpha t)\mathscr{U}(t)) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

☛ La fonction $t \longmapsto f(\alpha t)$ avec $\alpha > 0$ est la *dilatée* de f.

3.3 Transformée de $t \longmapsto f(t)e^{-at}\mathscr{U}(t)$

✏ Soit f une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE notée F et soit a un nombre réel tel que $F(p+a)$ soit défini. Déterminer la transformée de LAPLACE de $t \longmapsto f(t)e^{-at}\mathscr{U}(t)$.

Théorème 3.3.1
Si f est une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE *notée F et si a est un nombre réel tel que $F(p+a)$ soit défini, alors :*

$$\mathscr{L}\left(f(t)e^{-at}\mathscr{U}(t)\right) = F(p+a).$$

✏ Déterminer les transformées de $t \longmapsto e^{-at}\cos\omega t\,\mathscr{U}(t)$ et de $t \longmapsto e^{-at}\sin\omega t\,\mathscr{U}(t)$ $(a > 0)$.

3.4 Transformée de $t \longmapsto f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)$

✏ Soit f une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE notée F et soit τ un réel strictement positif.
En posant $x = t-\tau$, déterminer la transformée de LAPLACE de $t \longmapsto f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)$.

Théorème 3.4.1
Si f est une fonction telle que $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ admette une transformée de LAPLACE *notée F et si $\tau > 0$, alors :*

$$\mathscr{L}(f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)) = F(p)e^{-\tau p}$$

☛ La fonction $t \longmapsto f(t-\tau)$ avec $\tau \geqslant 0$ est la *translatée de* τ de la fonction f, le théorème précédent est parfois appelé *théorème du retard* et le terme $e^{-\tau p}$ est appelé *facteur retard*.

✏ Soit $\tau > 0$, représenter la fonction f (appelée *créneau*) définie par $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant t < \tau \\ 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou si } t \geqslant \tau. \end{cases}$

Déterminer, par un calcul direct, la transformée de f.
Écrire f en utilisant la fonction $\mathscr{U}$. Retrouver alors la transformée de f.

3.5 Transformée d'une fonction périodique

Théorème 3.5.1
Soit f *une fonction périodique de période* $T > 0$, *continue par morceaux sur l'intervalle* $[0\,;\,T]$ *telle que* $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$ *admette une transformée de* LAPLACE. *Alors :*

$$\mathscr{L}\left(f(t)\mathscr{U}(t)\right) = F_0(p)\frac{1}{1-e^{-pT}} \quad \text{où } F_0(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt.$$

✏ E et T étant deux nombres réels strictement positifs, représenter la fonction f périodique de période T telle que :

$$f(t) = \begin{cases} E \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \\ 0 \text{ si } \dfrac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Déterminer la transformée de $t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$.

3.6 Transformée d'une dérivée, d'une primitive

Théorème 3.6.1
Soit f *une fonction causale, définie et dérivable sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$ *ayant une limite à droite en* 0 *notée* $f(0+)$ *et une transformée de* LAPLACE *notée* F. *Si* f' *est définie et continue sur* $]0\,;\,+\infty[$ *alors :*

$$\mathscr{L}\left(f'(t)\mathscr{U}(t)\right) = pF(p) - f(0+).$$

Théorème 3.6.2 (corollaire du théorème 3.6.1)
Soit f *une fonction causale, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$ *telle que* f *et* f' *aient des limites à droite en* 0 *notées* $f(0+)$ *et* $f'(0+)$ *et* f *ait une transformée de* LAPLACE *notée* F. *Si* f'' *est définie et continue sur* $]0\,;\,+\infty[$ *alors :*

$$\mathscr{L}\left(f''(t)\mathscr{U}(t)\right) = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+).$$

✏ Soit x une fonction causale vérifiant les conditions du théorème 3.6.2, solution de l'équation différentielle $\dfrac{1}{2}x''(t) + x'(t) + x(t) = (t+1)\mathscr{U}(t)$ avec $x(0+) = 1$ et $x'(0+) = 0$.
Déterminer la transformée X de x.

Théorème 3.6.3
Si les fonctions considérées ont des limites réelles *dans les conditions indiquées, alors :*

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0+) \tag{3.6.3.1}$$

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t). \tag{3.6.3.2}$$

L'égalité 3.6.3.1 est le théorème de la valeur initiale *et l'égalité 3.6.3.2 est le* théorème de la valeur finale.

On admet le résultat suivant :

Théorème 3.6.4
Si $\mathscr{L}\left(f(t)\mathscr{U}(t)\right) = F(p)$ *alors* $\mathscr{L}\left(\displaystyle\int_0^t f(u)\,du\,\mathscr{U}(t)\right) = \dfrac{F(p)}{p}$.

4 Propriétés complémentaires

4.1 Dérivation et intégration d'une transformée de LAPLACE

Théorème 4.1.1
Si $\mathscr{L}(f(t)\mathscr{U}(t)) = F(p)$ *alors* $F'(p) = \mathscr{L}(-tf(t)\mathscr{U}(t))$ *et* $\displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)\,du = \mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\mathscr{U}(t)\right)$.

✏ Calculer $\mathscr{L}(-t\sin 3t\,\mathscr{U}(t))$ et $\mathscr{L}\left(\dfrac{\sin t}{t}\mathscr{U}(t)\right)$.

4.2 Impulsion unité

Soit n un entier naturel non nul et soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(t) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou } t > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$

✏ Représenter f_n.

On définit ainsi une suite (f_n) de fonctions telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f_n(t_0) = 0 \text{ si } t_0 > 0.$$

Par passage à la limite on est conduit à introduire l'*impulsion unité*.

Définition 4.2.1
*L'*impulsion de DIRAC[1] *ou* impulsion unité δ *vérifie :*

$$\delta(0) = +\infty, \delta(t) = 0 \textit{ si } t \neq 0 \textit{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

L'impulsion unité sert à représenter une impulsion s'exerçant pendant un temps très court.
Il s'agit d'une « fonction » ayant une image « très grande » sur une variation d'abscisse « très faible ».

Théorème 4.2.1
$\mathscr{L}(\delta(t)) = 1$.

5 Original d'une fonction

Dans les applications pratiques, on est amené, connaissant la fonction F à déterminer une fonction causale f telle que $\mathscr{L}(f) = F$.
Si f existe et est unique, f est appelé *original* de F, noté $\mathscr{L}^{-1}(F)$.
Pour déterminer f on utilisera la linéarité de la transformation de LAPLACE réciproque $\mathscr{L}^{-1}$ (conséquence immédiate de la linéarité de $\mathscr{L}$) et des propriétés de $\mathscr{L}$ (cf. page 4 du formulaire).

$$f(t)\,\mathscr{U}(t) \quad \underset{\xleftarrow[\mathscr{L}^{-1}]{}}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} \quad F(p)$$

1. Paul DIRAC, physicien britannique (1902-1984), prix Nobel (1938), l'un des créateurs de la mécanique quantique.