Suites numériques

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Décembre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Rappels sur les suites numériques

1.1 Suites numériques

Définition 1.1.1
On appelle suite numérique *toute application d'une partie* I *de* $\mathbb{N}$ *formée d'entiers consécutifs dans l'ensemble* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*
Si on note u_n *l'image de* n *par la suite* u *alors la suite se note* $(u_n)_{n\in I}$ *(*u_n *est le* terme général *de la suite) et en général* $I = \mathbb{N}$ *ou* $I = \mathbb{N} - \{0\}$*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la suite* u *peut se noter* (u_n)*.*

☛ Une suite peut être définie de manière explicite, c'est-à-dire que $u_n = f(n)$ ou par récurrence c'est-à-dire que $u_{n+1} = g(u_n)$ ou $u_{n+2} = h(u_n\,;\,u_{n+1})$ (f, g et h étant des fonctions numériques), le premier ou les deux premiers termes sont alors donnés.

✏ Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

Donner les 5 premiers termes de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n - 3$ et $v_0 = 1$.

Donner les 7 premiers termes de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$ sachant que $w_0 = w_1 = 1$ (suite de FIBONACCI).

1.2 Suites arithmétiques

Définition 1.2.1
Une suite $(u_n)_{n\in I}$ *est une* suite arithmétique *s'il existe un nombre* r *(appelé* raison *de la suite) tel que pour tout* $n \in I$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Théorème 1.2.1 (Propriétés des suites arithmétiques)
Si (u_n) *est une suite arithmétique de raison* r *:*

1. *Quel que soit l'entier* n, $u_n = u_0 + nr$ *et quels que soient les entiers* n *et* p, $u_n = u_p + (n-p)r$.
2. *Quel que soit l'entier* n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.

La première propriété donne deux conditions nécessaires et suffisantes pour prouver que (u_n) *est une suite arithmétique de raison* r.

1.3 Suites géométriques

Définition 1.3.1
Une suite $(u_n)_{n\in I}$ *est une* suite géométrique *s'il existe un nombre* $q \neq 0$ *(appelé* raison *de la suite) tel que pour tout* $n \in I$, $u_{n+1} = q\,u_n$.

Théorème 1.3.1 (Propriétés des suites géométriques)
Si (u_n) *est une suite géométrique de raison* $q \neq 0$ *:*

1. *Quel que soit l'entier* n, $u_n = u_0\,q^n$ *et quels que soient les entiers* n *et* p, $u_n = u_p\,q^{n-p}$.
2. *Quel que soit l'entier* n *et pour tout* $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$.

La première propriété donne deux conditions nécessaires et suffisantes pour prouver que (u_n) *est une suite géométrique de raison* $q \neq 0$.

✏ On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n - 3$ et $v_0 = 1$.
Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = v_n - 3$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et ler premier terme.
Calculer x_n puis v_n en fonction de n.

1.4 Variations d'une suite numérique réelle

Dans ce paragraphe les suites numériques sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (il s'agit de suites numériques réelles).

Définition 1.4.1 (sens de variation d'une suite numérique réelle)

1. *Une suite numérique* (u_n) *est* croissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ *;*
2. *Une suite numérique* (u_n) *est* strictement croissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} > u_n$ *;*
3. *Une suite numérique* (u_n) *est* décroissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ *;*
4. *Une suite numérique* (u_n) *est* strictement décroissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} < u_n$ *;*
5. *Une suite numérique* (u_n) *est* constante *ou* stationnaire *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} = u_n$ *;*
6. *Une suite numérique est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante ;*
7. *Une suite numérique est* strictement monotone *si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.*

☛ Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier le signe de cette différence.

✏ Déterminer le sens de variation des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = -3n + 1$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$ avec $v_0 = 2$ et $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{w_n}$ avec $w_0 = 1$.

☛ Une suite numérique réelle ne peut être (strictement) monotone qu'à partir d'un certain rang.

Théorème 1.4.1 (sens de variation de la suite géométrique de terme général q^n)
Si q *est un nombre réel strictement positif, la suite géométrique* (q^n) *est strictement croissante si* $q > 1$, *constante si* $q = 1$ *et strictement décroissante si* $0 < q < 1$.

✏ $u_n = q^n$. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et conclure.

2 Limites des suites numériques réelles

2.1 Limites des suites de référence

Théorème 2.1.1
Soit p *un entier naturel non nul.*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Théorème 2.1.2 (Limites de la suite géométrique (q^n))
Si q *est un nombre réel non nul, alors :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ *si et seulement si* $q > 1$ *;*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ *si et seulement si* $0 < q < 1$ *ou* $-1 < q < 0$ *(c'est-à-dire* $0 < |q| < 1$*).*

2.2 Définition de la convergence d'une suite numérique réelle

Définition 2.2.1
Lorsqu'une suite numérique a pour limite (en $+\infty$*) un nombre* ℓ *on dit que cette suite est* convergente *et plus précisément qu'elle* converge vers ℓ.
Lorsqu'une suite converge vers le nombre ℓ*, la limite* ℓ *est unique.*
Dans les autres cas, c'est-à-dire lorsqu'une suite numérique a pour limite (en $+\infty$*)* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *ou n'a pas de limite (en* $+\infty$*), on dit qu'elle* diverge *ou que c'est une suite* divergente.

2.3 Théorèmes sur les limites des suites numériques réelles

Théorème 2.3.1
Si (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites numériques réelles telles qu'à partir d'un certain rang* $u_n \leqslant v_n$ *et si ces deux suites ont pour limites respectives* a *et* b *alors* $a \leqslant b$.

☛ Si on a $u_n < v_n$ on a encore $a \leqslant b$, les inégalités strictes ne sont pas conservées au sens strict par passage à la limite.

Théorème 2.3.2 (théorème « des gendarmes »)
Si (u_n), (v_n) *et* (w_n) *sont trois suites numériques réelles telles qu'à partir d'un certain rang on a* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, *si* (v_n) *et* (w_n) *convergent vers* ℓ *alors la suite* (u_n) *converge et sa limite est* ℓ.

✏ Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et déterminer sa limite.

Théorème 2.3.3 (théorèmes de comparaison)
On considère deux suites numériques réelles (u_n) *et* (v_n) *telles qu'à partir d'un certain rang* $v_n \leqslant u_n$.

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

✏ Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + (-1)^n$ possède une limite et déterminer cette limite.

Théorème 2.3.4
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, *avec* a *et* b *deux nombres réels, alors :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = ab$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ *(avec* $b \neq 0$*)*.

Théorème 2.3.5
a *désigne un nombre réel ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$.
Si (u_n) *est une suite numérique réelle telle que* $u_n = f(n)$ *où* f *est une fonction numérique (réelle) vérifiant* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

✏ Étudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

☛ La réciproque du théorème 2.3.5 est fausse.
Vérifier-le en considérant la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2\pi x)$.

2.4 Comportement asymptotique comparé des suites (a^n), (n^p) et $(\ln(n))$

Théorème 2.4.1
Quels que soient le nombre réel $a > 0$ *et l'entier naturel* p *non nul :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^p} = +\infty$ *lorsque* $a > 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^p \times a^n) = 0$ *lorsque* $0 < a < 1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^p} = 0$.

2.5 Théorème sur les suites récurrentes

Théorème 2.5.1
Si une suite numérique récurrente (u_n) *définie par son premier terme* u_0 *(ou* u_1*) et une relation du type* $u_{n+1} = f(u_n)$ *où* f *est une fonction continue, est convergente, alors sa limite* ℓ *vérifie* $\ell = f(\ell)$.

✏ On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 1$.

Calculer les premiers termes de cette suite. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (u_n) ?
On admet que la suite (u_n) converge, déterminer alors la limite de la suite (u_n).

3 Travaux pratiques

3.1 Suites récurrentes qui vérifient $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n - 3$.

1. Calculer les premiers termes de cette suite. Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 6$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Calculer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En utilisant les résultats précédents, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.2 Suites récurrentes qui vérifient $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -\dfrac{3}{2} u_{n+1} + u_n$ (égalité 1).

1. Montrer qu'il existe deux suites géométriques (v_n) et (w_n) définies par $v_n = \alpha^n$ et $w_n = \beta^n$ vérifiant l'égalité 1.
2. Montrer que si λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels quelconques, alors la suite $(\lambda_1 v_n + \lambda_2 w_n)$ vérifie l'égalité 1.

   On admettra que toute suite vérifiant l'égalité 1 est de cette forme.
3. Déterminer λ_1 et λ_2 en utilisant les conditions $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
4. En utilisant les résultats précédents, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.