Transformation en $\mathcal{Z}$

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Janvier 2011

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Échantillonnage d'un signal

1.1 Introduction

On peut étudier certains éléments mathématiques adaptés à l'étude de signaux analogiques représentés par des fonctions causales, le temps étant la variable continue prenant des valeurs sur un intervalle.
Avec les moyens actuels de traitement de l'information, on considère souvent une liste de nombres correspondant à des mesures effectuées régulièrement avec une période fixe, cette dernière étant très courte pour que la perte d'information soit très faible. On obtient ainsi un signal numérique appelé *signal échantillonné*.
Le modèle mathématique adapté à un signal échantillonné est une suite numérique (x_n) où les nombres x_n sont les valeurs successives mesurées avec la période T fixée.
Ainsi, dans le cas d'un signal analogique associé par une fonction causale f, le signal échantillonné est associé à la suite de terme général $x_n = x(n)$ définie par :

$$x(n) = f(nT) \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

☛ Lorsque la période n'est pas précisée, on la suppose égale à 1.
Si le signal analogique f n'est pas causal, on peut alors définir le signal échantillonné pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ par $x(n) = f(nT)$.

1.2 Échelon unité discret (ou séquence échelon unité)

L'*échelon unité discret*, noté e ou $\mathscr{U}$ ou u est le signal échantillonné associé à la fonction échelon unité $\mathscr{U}$ définie dans le chapitre sur la transformation de LAPLACE dans le cas où $T = 1$. On a donc :

$$e(n) = 1 \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

✏ Représenter e.

☛ Si cela est nécessaire, on posera $e(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$. Cela permet, par multiplication, de transformer un signal discret en un signal discret causal.

1.3 Impulsion unité discrète (ou séquence unité discrète)

L'*impulsion unité discrète*, notée d est définie par :

$$d(0) = 1 \text{ et } d(n) = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

✏ Représenter d.

☛ Si cela est nécessaire, on posera $d(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$.

1.4 Rampe causale discrète

La *rampe causale discrète*, notée r est définie par :

$$r(n) = n \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

✏ Représenter r.

☛ Si cela est nécessaire, on posera $r(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$.

1.5 Signal causal carré discret

Le *signal causal carré discret*, notée c est définie par :

$$c(n) = n^2 \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

✏ Représenter c.

☛ Si cela est nécessaire, on posera $c(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$.

1.6 Signal causal exponentiel discret

Soit a un nombre réel non nul. Le *signal causal exponentiel discret* ou *signal causal géométrique discret* est définie par :

$$f(n) = a^n \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

✏ Représenter f en choisissant une valeur $a \in]0\,;\,1[$ et une autre valeur $a \in]1\,;\,+\infty[$.

☛ Si cela est nécessaire, on posera $f(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$.
Si $a = 1$, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$, on retrouve l'échelon unité discret.

2 Transformation en $\mathcal{Z}$

2.1 Définition

Par analogie avec la transformation de LAPLACE, on donne la définition 2.1.1.

Définition 2.1.1
Soit $x : n \longmapsto x(n)$ *un signal causal discret. La* transformée en $\mathcal{Z}$ *de* x *est la fonction :*

$$\mathcal{Z}x \;:\; z \longmapsto (\mathcal{Z}x)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

définie pour tout nombre réel ou complexe z *tel que la série converge.*

2.2 Exemples de transformées en $\mathcal{Z}$ de signaux discrets

2.2.1 Transformée en $\mathcal{Z}$ de l'échelon unité discret

Comme, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $e(n) = 1$ on a :

$$(\mathcal{Z}e)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

pour tout nombre z tel que $|z^{-1}| < 1$, c'est-à-dire $|z| > 1$, puisqu'on reconnaît une série géométrique de raison z^{-1}.

Théorème 2.2.1
La transformée en $\mathcal{Z}$ *de l'échelon unité discret est la fonction* $\mathcal{Z}e$ *définie pour tout nombre* z *tel que* $|z| > 1$ *par :*

$$(\mathcal{Z}e)(z) = \frac{z}{z-1}.$$

2.2.2 Transformée en $\mathcal{Z}$ de l'impulsion unité discrète

Comme $d(0) = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $d(n) = 0$ on a :

$$(\mathcal{Z}d)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d(n)z^{-n} = d(0)z^0 = 1 \text{ pour tout nombre } z.$$

Théorème 2.2.2
La transformée en $\mathcal{Z}$ *de l'impulsion unité discrète est la fonction* $\mathcal{Z}d$ *définie pour tout nombre* z *par :*

$$(\mathcal{Z}d)(z) = 1.$$

2.2.3 Transformée en $\mathcal{Z}$ de la rampe causale discrète

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $r(n) = n$. On admet le théorème 2.2.3.

Théorème 2.2.3
La transformée en $\mathcal{Z}$ de la rampe causale discrète est la fonction $\mathcal{Z}r$ définie pour tout nombre z tel que $|z| > 1$ par :

$$(\mathcal{Z}r)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

☛ Pour démontrer le théorème 2.2.3, on dérive « terme à terme » la série intervenant dans $\mathcal{Z}r$, ce qui n'est pas au programme de STS IRIS.

2.2.4 Transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal carré discret

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $c(n) = n^2$. On admet le théorème 2.2.4.

Théorème 2.2.4
La transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal carré discret est la fonction $\mathcal{Z}c$ définie pour tout nombre z tel que $|z| > 1$ par :

$$(\mathcal{Z}c)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

2.2.5 Transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal exponentiel discret

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = a^n$ avec a un nombre réel ou complexe non nul. On a :

$$(\mathcal{Z}f)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$

Puisqu'on reconnaît une série géométrique de raison az^{-1}. Cette série converge pour tout nombre z tel que $|az^{-1}| < 1$, c'est-à-dire $|z| > |a|$.

Théorème 2.2.5
Soit a un nombre réel ou complexe non nul.
La transformée en $\mathcal{Z}$ du signal causal exponentiel discret f défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = a^n$ est la fonction $\mathcal{Z}f$ définie pour tout nombre z tel que $|z| > |a|$ par :

$$(\mathcal{Z}f)(z) = \frac{z}{z-a}.$$

2.3 Propriétés de la transformation en $\mathcal{Z}$

La transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal causal discret x sera notée $\mathcal{Z}x$ ou $\mathcal{Z}(x)$ (en cas de confusion possible).

Conformément au programme de STS IRIS, on supposera remplies les conditions de convergence des séries. les propriétés énoncées sont souvent analogues à celles de la transformation de LAPLACE.

2.3.1 Linéarité

Théorème 2.3.1
Soient x et y deux signaux causaux discrets, soient A et B deux nombres réels ou complexes.

$$\mathcal{Z}(Ax + By) = A\mathcal{Z}(x) + B\mathcal{Z}(y).$$

☛ la propriété énoncée dans le théorème 2.3.1 s'étend à un nombre fini de signaux causaux discrets et de constantes.

✏ Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal x défini par $x(n) = n + 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Translation de la variable – cas du retard

Théorème 2.3.2 (Théorème du retard)
Soit x *un signal causal discret et soit* y *le signal retardé de* n_0 *où* n_0 *est un nombre entier strictement positif. On a donc, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = x(n - n_0)e(n - n_0)$.
Les transformées en $\mathcal{Z}$ *de* x *et* y *sont liées par la relation :*

$$(\mathcal{Z}y)(z) = z^{-n_0}(\mathcal{Z}x)(z).$$

Le nombre z^{-n_0} *est le* facteur retard.

✏ Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal x défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $y(n) = (n - 1)e(n - 1)$.

2.3.3 Translation de la variable – cas de l'avance

Théorème 2.3.3 (avance d'une unité)
Soit x *un signal causal discret et soit* y *le signal avancé d'une unité. On a donc, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = x(n + 1)$.
Les transformées en $\mathcal{Z}$ *de* x *et* y *sont liées par la relation :*

$$(\mathcal{Z}y)(z) = z\left[(\mathcal{Z}x)(z) - x(0)\right].$$

☛ Dans le cas où $x(0) = 0$ on a $(\mathcal{Z}y)(z) = z \times (\mathcal{Z}x)(z)$. L'avance d'une unité correspond au produit de $(\mathcal{Z}x)(z)$ par z (cf. la transformée de LAPLACE de f').

✏ Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal y défini par $y(n) = (n + 1)^2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (*deux méthodes*).

Théorème 2.3.4 (avance de deux unités)
Soit x *un signal causal discret et soit* y *le signal avancé de deux unités. On a donc, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = x(n + 2)$.
Les transformées en $\mathcal{Z}$ *de* x *et* y *sont liées par la relation :*

$$(\mathcal{Z}y)(z) = z^2\left[(\mathcal{Z}x)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right].$$

✏ Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal y défini par $y(n) = e(n + 2)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.3.5 (cas général – avance de n_0 unités)
Soit x *un signal causal discret et soit* y *le signal avancé de* n_0 *unités (*n_0 *étant un entier naturel non nul). On a donc, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = x(n + n_0)$.
Les transformées en $\mathcal{Z}$ *de* x *et* y *sont liées par la relation :*

$$(\mathcal{Z}y)(z) = z^2\left[(\mathcal{Z}x)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} - \cdots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}\right].$$

2.3.4 Effet de la multiplication par a^n

Théorème 2.3.6
Soit x *un signal causal discret et soit* y *le signal défini pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $y(n) = a^n x(n)$ *où* a *est un nombre réel ou complexe non nul.*
Les transformées en $\mathcal{Z}$ *de* x *et* y *sont liées par la relation :*

$$(\mathcal{Z}y)(z) = (\mathcal{Z}x)\left(\frac{z}{a}\right).$$

☛ Si $\mathcal{Z}x$ est définie pour tout nombre z tel que $|z| > R$ (R étant un nombre réel positif) alors $\mathcal{Z}y$ est définie pour tout nombre z tel que $|z| > |a| \times R$.

✏ Déterminer la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal discret causal y défini par $y(n) = 3^n \times n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2.3.5 Théorème de la valeur initiale et théorème de la valeur finale

Les théorèmes 2.3.7 et 2.3.8 sont utiles en physique pour prendre en compte des conditions initiales et pour étudier la tendance à long terme d'un phénomène.

Théorème 2.3.7 (théorème de la valeur initiale)
Si x est un signal causal discret dont la transformée en $\mathcal{Z}$ possède une limite en $+\infty$, alors :

$$\lim_{z\to+\infty} (\mathcal{Z}x)(z) = x(0).$$

Théorème 2.3.8 (théorème de la valeur finale)
Si x est un signal causal discret alors :

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)\times(\mathcal{Z}x)(z)] = \lim_{n\to+\infty} x(n).$$

(On suppose que les deux limites existent.)

☛ Les démonstrations des théorèmes 2.3.7 et 2.3.8 reposent sur des passages à la limite dans des séries entières qui ne sont pas au programme de STS IRIS.

3 Transformation en $\mathcal{Z}$ réciproque

Dans les applications pratiques, on est amené, connaissant la fonction X, à déterminer un signal causal x tel que $\mathcal{Z}x = X$.

3.1 Notion d'original

Théorème 3.1.1 (admis)
On considère R un nombre réel strictement positif, x et y deux signaux causaux discrets qui admettent chacun une transformées en $\mathcal{Z}$.
Si $(\mathcal{Z}x)(z) = (\mathcal{Z}y)(z)$ pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| > R$, alors $x = y$.

Le théorème 3.1.1 permet de donner la définition :

Définition 3.1.1
*Lorsque le signal causal discret x possède une transformée en $\mathcal{Z}$ notée X, on dit que x est l'*original *de X.*

$$x(n) \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} X(z)$$

Pour déterminer x on utilisera la linéarité de la transformation en $\mathcal{Z}$ réciproque (conséquence immédiate de la linéarité de la transformation en $\mathcal{Z}$) et des propriétés de la transformation en $\mathcal{Z}$.

3.2 Exercice d'application

On considère deux nombres complexes a et b non nuls tels que $|a| > |b|$. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| > |a|$, on pose :

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}.$$

1. Déterminer les nombres complexes A et B, tels que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| > |a|$, on ait :
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}.$$
2. Déterminer l'original x de X, c'est-à-dire le signal causal x tel que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| > |a|$, on ait $(\mathcal{Z}x)(z) = X(z)$.