IRIS 2 – préparation au devoir en classe n° 1

EXERCICE 1 – recherche de la transformée de LAPLACE d'une fonction

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = t\mathscr{U}(t) - 2(t-1)\mathscr{U}(t-1) + (t-2)\mathscr{U}(t-2).$$

1. Déterminer les expressions de $h(t)$ sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$, $[0\,;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $[2\,;\,+\infty[$.
2. Représenter graphiquement la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.
3. Déterminer l'image H, par la transformation de LAPLACE, de la fonction h.

EXERCICE 2 – recherches d'images et d'originaux

1. Déterminer les transformées de LAPLACE F_1, F_2 et F_3 (dont on supposera l'existence) des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(t) = \cos(t)\,\mathscr{U}(t), \qquad f_2(t) = e^{-t}\cos(t)\,\mathscr{U}(t), \qquad f_3(t) = te^{-t}\cos(t)\,\mathscr{U}(t).$$

2. Déterminer les originaux g_1, g_2 et g_3 (dont on supposera l'existence) des fonctions G_1, G_2 et G_3 définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$G_1(p) = \frac{2}{p^2+4}, \qquad G_2(p) = \frac{2}{(p+2)^2+4}, \qquad G_3(p) = \frac{2e^{-p}}{(p+2)^2+4}.$$

EXERCICE 3 – résolution d'une équation différentielle avec la transformation de LAPLACE

y étant une fonction causale, c'est-à-dire nulle sur $]-\infty\,;\,0[$, dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = [\cos(t) + 2\sin(t)]\mathscr{U}(t) \text{ avec } y(0+) = 2.$$

1. Déterminer l'image F par la transformation de LAPLACE de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = [\cos(t) + 2\sin(t)]\mathscr{U}(t)$.
2. On admet que la solution y de l'équation (E) admet une image par la transformation de LAPLACE notée Y.

   Montrer que, pour tout réel $p > 0$, $Y(p) = \dfrac{2p^2+p+4}{(p^2+1)(p+2)}$.
3. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout réel $p > 0$,

$$\frac{2p^2+p+4}{(p^2+1)(p+2)} = \frac{a}{p^2+1} + \frac{b}{p+2}.$$

4. Déduire des résultats précédents l'expression de $y(t)$.