BTS 2013, groupement A, Nouvelle-Calédonie
Exercice sur les équations différentielles et la transformation de LAPLACE

## Partie A

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + 40y' + 2\,000y = 0 \qquad (1)$$

dans laquelle $y$ est une fonction de la variable réelle $t$, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
2. On considère la fonction $f$, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(t) = e^{-20t}\sin(40t).$$

La courbe représentative $\Gamma$ de la fonction $f$ figure sur l'annexe 1 page 3.
On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel $t$ :

$$f'(t) = e^{-20t}\left[40\cos(40t) - 20\sin(40t)\right].$$

b. Justifier que la fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle (1) puis que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 40$.

c. Le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction $f$ s'écrit sous la forme :

$$f(t) = 40t - 800t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

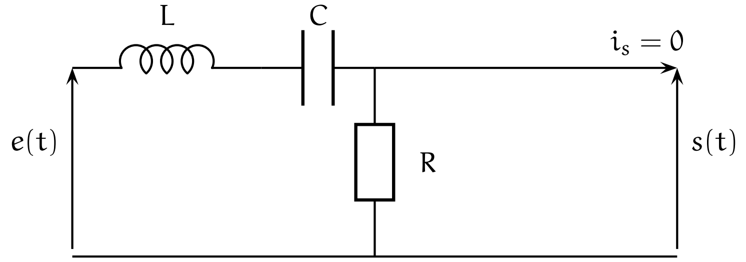
i. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $\Gamma$ au point d'abscisse 0.
ii. Étudier la position relative de la courbe $\Gamma$ par rapport à la tangente $T$ au voisinage de 0.
iii. Sur l'annexe 1 page 3, tracer la droite $T$.

## Partie B

On désigne par $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité, définie pour tout nombre réel $t$ par :

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

On considère le filtre suivant :



Les constantes $R, L$ et $C$ sont des réels strictement positifs caractéristiques du circuit.
À l'entrée de ce filtre, on applique une tension modélisée par une fonction $e$.
En sortie, on recueille une tension modélisée par une fonction $s$.
Les éléments du circuit sont traversés par un même courant et l'intensité à la sortie, notée $i_s$, est nulle.
On suppose que les deux fonctions $e$ et $s$ sont nulles pour tout nombre réel $t$ strictement négatif et qu'elles admettent des transformées de LAPLACE notées respectivement $E$ et $S$.
Les fonctions $e$ et $s$ sont telles que, pour tout nombre réel $t$ strictement positif :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R}{L}s(t) + \frac{1}{LC}\int_0^t s(u)du = \frac{R}{L}e(t). \tag{2}$$

De plus, $s(0) = 0$ et on suppose que :

$$R = 20\,\Omega, \quad L = 0{,}5\,\mathrm{H} \quad \text{et} \quad C = 0{,}001\,\mathrm{F}.$$

1. La fonction $e$ est définie, pour tout nombre réel $t$, par :

$$e(t) = \mathscr{U}(t).$$

   Déterminer $E(p)$.
2. En appliquant la transformation de LAPLACE aux deux membres de la relation (2), déterminer une expression de $S(p)$.
3. Vérifier que :

$$S(p) = \frac{40}{(p+20)^2 + 40^2}.$$

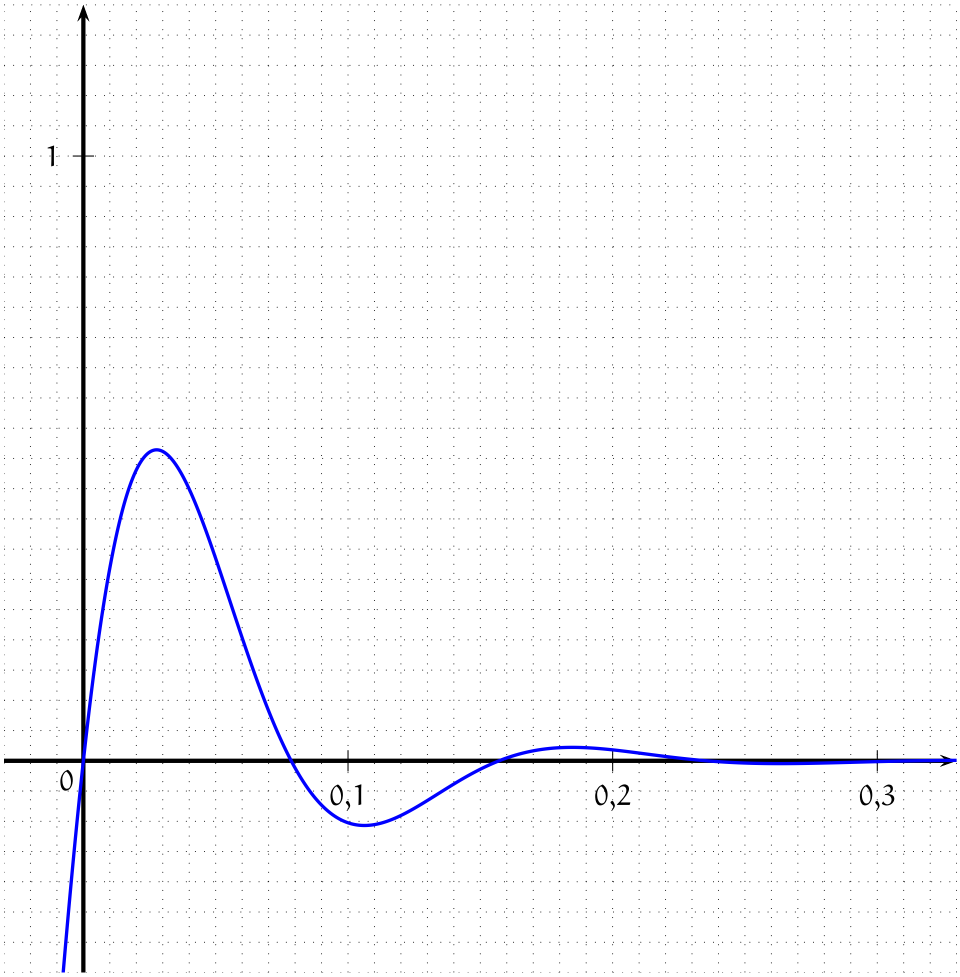
4. a. Déterminer l'original de $H$ définie par $H(p) = \dfrac{40}{p^2 + 40^2}$.
   En déduire l'original de $S$.

   b. En déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel $t$ positif ou nul.

   c. La courbe représentative de la fonction $s$ est tracée sur l'annexe 2 page 4.
   Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel $t_1$ à partir duquel la valeur absolue de $s(t)$ est strictement inférieure à 0,05, c'est-à-dire à partir duquel, pour tout réel $t > t_1$, $|s(t)| \leqslant 0{,}05$.

**Annexe 1**

La courbe Γ



# Annexe 2

Courbe représentative de la fonction s