Calcul matriciel

Terminale S (enseignement de spécialité)
Lycée Charles PONCET

Décembre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Égalité de deux matrices

1.1 Définition d'une matrice

Définition 1.1.1
Une matrice *est un tableau rectangulaire de nombres réels.*

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes. On dira que cette matrice est de dimension $n \times p$ ou de type $(n\,;\,p)$ ou de format $(n\,;\,p)$ ou que c'est une matrice $(n\,;\,p)$.
Si le nombre réel (appelé *élément*, *terme* ou *coefficient*) situé à la i^e ligne et à la j^e colonne de la matrice A est noté a_{ij}, on notera la matrice A sous la forme $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou $A = (a_{ij})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

- ☛ Une *ligne* est une rangée « horizontale » de nombres et une *colonne* est une rangée « verticale » de nombres.
- ✏ Donner un exemple d'une matrice A de type $(3\,;\,2)$ et un autre d'une matrice B de type $(2\,;\,3)$.

1.2 Égalité de deux matrices

Définition 1.2.1
Si $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *sont deux matrices de même type* $(n\,;\,p)$*, alors* $A = B$ *si et seulement si, quels que soient les entiers naturels* $i \in [1\,;\,n]$ *et* $j \in [1\,;\,p]$*,* $a_{ij} = b_{ij}$ *(les éléments situés aux mêmes places sont égaux).*

1.3 Matrice transposée

Définition 1.3.1
Si $A = (a_{ij})$ *est une matrice de type* $(n\,;\,p)$*, la* transposée *de* A *est la matrice* ${}^tA$ *de type* $(p\,;\,n)$ *dont le terme général est* $a'_{ji} = a_{ij}$ *(on échange les lignes avec les colonnes).*

- ✏ Déterminer les transposées des matrices A et B de l'exemple précédent.

2 Somme de deux matrices

2.1 Définition

Définition 2.1.1
Si $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *sont deux matrices de type* $(n\,;\,p)$*, alors* $A + B$ *est la matrice de type* $(n\,;\,p)$ *dont le terme général est* $a_{ij} + b_{ij}$ *(on additionne les matrices « termes à termes »).*

- ✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$.

2.2 Propriétés

1. Si A, B et C sont trois matrices de même type alors :
   - $A + B = B + A$ (commutativité) ;
   - $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité).
2. Si O est la matrice de même type que A dont tous les éléments sont nuls, appelée *matrice nulle*, alors :
   - $A + O = O + A = A$ (O est l'élément neutre pour l'addition des matrices).
3. Si on note $A = (a_{ij})$ et $-A = (-a_{ij})$ alors :
   - $A + (-A) = (-A) + A = O$ ($-A$ est l'opposée de A).

- ✏ Écrire $-A$ et $-B$ pour les matrices de l'exemple précédent.

3 Produit d'une matrice et d'un nombre réel

3.1 Définition

Définition 3.1.1
Si $A = (a_{ij})$ *est une matrice de type* $(n\ ;\ p)$ *et si* α *est un nombre réel, alors* αA *est la matrice de type* $(n\ ;\ p)$ *dont le terme général est* αa_{ij} *(on multiplie tous les éléments de* A *par le nombre* α*).*

✏ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$, calculer $-2A$.

☛ Les notations $A\alpha$ et $A.\alpha$ n'existent pas.

3.2 Propriétés

Propriété 3.2.1
Si A *et* B *sont deux matrices de même type et si* α *et* β *sont deux nombres réels, alors :*

- $1A = A$ *;*
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *;*
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *;*
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \alpha\beta A$ *;*
- $0A = O$ *;*
- $(-1)A = -A$.

Propriété 3.2.2
Si A*,* B *et* C *sont trois matrices de même type et si* α *est un nombre réel, alors :*

- $A = B$ *est équivalent à* $A + \alpha C = B + \alpha C$ *;*
- $A + B = C$ *est équivalent à* $A = C - B$.

4 Produit matriciel

4.1 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 4.1.1
Si $A = (a_{1j})$ *est une matrice ligne à* p *colonnes et si* $B = (b_{j1})$ *est une matrice colonne à* p *lignes, alors* AB *ou* $A \times B$ *est la matrice de type* $(1\ ;\ 1)$ *dont l'unique terme est* c_{11} *défini par :*

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} = \sum_{j=1}^{j=p} a_{1j}b_{j1}.$$

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

4.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition 4.2.1
Si $A = (a_{ij})$ *est une matrice de type* $(n\ ;\ p)$ *et si* $B = (b_{j1})$ *est une matrice colonne à* p *lignes, alors* AB *ou* $A \times B$ *est la matrice colonne à* n *lignes dont le terme de la* i^e *ligne est* c_{i1} *défini par :*

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{ip}b_{p1} = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}b_{j1}.$$

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

Propriété 4.2.1
Si A est une matrice de type $(n\ ;\ p)$, si X et Y sont des matrices colonnes à p lignes et si α est un nombre réel alors :

- $A(X+Y) = AX + AY$;
- $A(\alpha X) = \alpha(AX)$.

4.3 Produit d'une matrice ligne par une matrice

Définition 4.3.1
Si $A = (a_{1j})$ est une matrice ligne à p colonnes et si $B = (b_{jk})$ est une matrice de type $(p\ ;\ q)$, alors AB ou $A \times B$ est la matrice ligne à q colonnes dont le terme de la k^e colonne est c_{1k} défini par :

$$c_{1k} = a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \cdots + a_{1p}b_{pk} = \sum_{j=1}^{j=p} a_{1j}b_{jk}.$$

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

Propriété 4.3.1
Si X et Y sont des matrices lignes à p colonnes, si A est une matrice de type $(p\ ;\ q)$ et si α est un nombre réel alors :

- $(X+Y)A = XA + YA$;
- $(\alpha X)A = \alpha(XA)$.

4.4 Cas général

Définition 4.4.1
Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $(n\ ;\ p)$ et si $B = (b_{jk})$ est une matrice de type $(p\ ;\ q)$, alors AB ou $A \times B$ est la matrice de type $(n\ ;\ q)$ dont le terme général, situé à la la i^e ligne et à la k^e colonne, est c_{ik} défini par :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}b_{jk}$$

(on multiplie les matrices « lignes par colonnes »).

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

☛ Pour pouvoir calculer le produit AB, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

4.5 Propriétés du produit des matrices carrées

Définition 4.5.1
Une matrice carrée *est une matrice ayant autant de lignes que de colonnes.*
*Ainsi, un matrice de type $(n\ ;\ n)$ est une matrice carrée d'*ordre n.

Propriété 4.5.1
Si A, B et C sont des matrices carrées d'ordre n et si α et β sont des nombres réels, alors :

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ *(associativité) ;*
- $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivité à gauche) ;*
- $(A + B)C = AC + BC$ *(distributivité à droite) ;*
- $(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)AB$.

Définition 4.5.2
Pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, les éléments a_{ii} sont situés sur la diagonale (principale) *de A.*
Une matrice diagonale *est une matrice carrée dont tous les éléments non situés sur la diagonale sont nuls.*

Définition 4.5.3
On note I_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de sa diagonale qui sont égaux à 1. I_n est la matrice unité *ou* matrice identique *ou* matrice identité. *On a donc :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

☛ S'il n'y a pas d'ambiguïté, cette matrice sera notée I.

✏ a et b étant des nombres réels non nuls, on pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.
Calculer DT et TD.

Propriété 4.5.2
Quelle que soit la matrice carrée A d'ordre n, $AI = IA = A$.
La matrice identique est l'élément neutre pour le produit des matrices carrées.

Remarque importante

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

☛ Cet exemple prouve que le produit des matrices carrées n'est pas commutatif, c'est-à-dire qu'en général on a $AB \neq BA$.

4.6 Puissance d'une matrice carrée

Définition 4.6.1
Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on pose $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, et plus généralement, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ facteurs}}.$$

De plus, pour toute matrice A non nulle, on pose $A^0 = I$.

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

Propriété 4.6.1
Soit D *la matrice diagonale d'ordre* n *définie par* $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & d_n \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel k, $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$.

☛ Démontrer la propriété 4.6.1 par récurrence sur k, pour une matrice diagonale d'ordre 2.

4.7 Inverse d'une matrice carrée

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.

Définition 4.7.1
Soit A *une matrice carrée d'ordre* n*. S'il existe une matrice carrée* B *d'ordre* n *telle que* $AB = BA = I$*, on dit que la matrice* A *est* inversible.

☛ Dans l'exemple précédent A est inversible.

Propriété 4.7.1 (admise)
Soit A *une matrice carrée d'ordre* n.
- *S'il existe une matrice carrée* B *d'ordre* n *telle que* $AB = I$ *alors* $BA = I$.
- *S'il existe une matrice carrée* B *d'ordre* n *telle que* $BA = I$ *alors* $AB = I$.

Propriété 4.7.2
Soit A *une matrice carrée d'ordre* n.
S'il existent deux matrices carrées B *et* C *d'ordre* n *telles que* $AB = I$ *et* $CA = I$ *alors* $B = C$.

✏ Démontrer la propriété 4.7.2.

Définition 4.7.2
Si une matrice carrée A *d'ordre* n *est inversible, l'unique matrice* B *telle que* $AB = BA = I$ *est la* matrice inverse *de* A *et on pose* $B = A^{-1}$.

✏ Donner l'inverse de la matrice A de l'exemple précédent.

On pose $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Calculer $M^2 + M$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Théorème 4.7.3
Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *d'ordre 2, non nulle, est inversible si, et seulement si,* $ad - bc \neq 0$.

✏ Démontrer la théorème 4.7.3 en calculant AB avec $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Définition 4.7.3
Pour une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *d'ordre 2, le nombre* $ad - bc$ *est le* déterminant *de* A *et on pose* $\det(A) = ad - bc$.

Propriété 4.7.4
Si la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *d'ordre 2 est inversible alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

✏ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer successivement A^{-1}, B^{-1}, AB, $(AB)^{-1}$ et $B^{-1} \times A^{-1}$.

5 Application aux systèmes linéaires

5.1 Définition d'un système linéaire

Définition 5.1.1
Un sytème linéaire *de* n *équations à* p *inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *est un système qui peut s'écrire sous la forme :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Écriture matricielle

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, le système s'écrit $AX = B$.

✏ Écrire sous forme matricielle le système $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$

☛ Un système linéaire peut s'écrire également ${}^tX\,{}^tA = {}^tB$ (avec cette écriture, les équations sont écrites sur une seule ligne et non en colonne).

5.2 Résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues

Théorème 5.2.1
Soit n *un entier naturel non nul.*
Si un système linéaire de n *équations à* n *inconnues a pour écriture matricielle* $AX = B$ *où* A *est une matrice carrée d'ordre* n inversible*, alors ce système a une solution unique donnée par* $X = A^{-1}B$.

✏ Démontrer le théorème 5.2.1 en multipliant à gauche l'égalité $AX = B$ par A^{-1}.

Vérifier que la matrice A du système précédent est inversible et calculer A^{-1}. En déduire la solution du système.

Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - y + 2z = 15 \\ x + 3y + 2z = 5. \end{cases}$ en utilisant votre calculette pour effectuer les calculs.

☛ Lorsque A n'est pas inversible, le système n'a pas une solution unique. Il peut avoir une infinité de solutions ou aucune solution.

Théorème 5.2.2 (admis)
Si un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ *où* A *est une matrice carrée d'ordre* n *a une solution unique alors* A *est inversible.*