$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Terminales S (enseignement de spécialité)}\\ \text{Corrigé de l'exercice 4 bis du baccalauréat blanc}\end{array}}$$

1. *Inverse de la matrice* A *d'ordre 3 qui vérifie* $A^2 - 6A + 3I = O$

   $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{3}A + 2I.}$

   En effet, A vérifie $A^2 - 6A + 3I = O$ donc $-A^2 + 6A = 3I$ soit $-\frac{1}{3}A^2 + 2A = I$ en en mettant A en facteur, à droite ou à gauche, on a par exemple, $A \times \left(-\frac{1}{3}A + 2I\right) = I$, donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3}A + 2I$.

2. *Inverse de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $t \neq 0$

   $\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.}$

   En effet, $B \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0 \times (-t) & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ t \times 1 + 1 \times (-t) & t \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Donc B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$.

3. *Restes de la division euclidienne de* n^2 *par* 4

   $\boxed{\text{Les restes possibles sont 0 et 1.}}$

   On a :
   - Si $n = 4k$ alors $n^2 = 16k^2$ donc le reste est 0.
   - Si $n = 4k + 1$ alors $n^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$ donc le reste est 1.
   - Si $n = 4k + 2$ alors $n^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$ donc le reste est 0.
   - Si $n = 4k + 3$ alors $n^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 8k + 2) + 1$ donc le reste est 1.

   Remarque : on peut aussi utiliser les congruences modulo 4.

4. *Condition nécessaire et suffisante pour que* $5n$ *soit le reste de la division de* $n^3 + n^2 + 5n$ *par* n^2

   $\boxed{5n \text{ est le reste de la division de } n^3 + n^2 + 5n \text{ par } n^2 \text{ si, et seulement si, } n \geqslant 6.}$

   En effet, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $n^3 + n^2 + 5n = n^2(n + 1) + 5n$ est une division euclidienne par n^2 si, et seulement si, $0 \leqslant 5n < n^2$.
   - L'inégalité $0 \leqslant 5n$ est vérifiée car n est un entier naturel non nul.
   - L'inégalité $5n < n^2$ est équivalente à $n^2 - 5n > 0$ d'où $n(n - 5) > 0$.
     Comme n est strictement positif, $5n < n^2$ est équivalente à $n - 5 > 0$ soit $n > 5$ ou encore $n \geqslant 6$ car n est un nombre entier.

5. *Propriété de* $N = n^4 + 7n^2 + 10$

   $\boxed{\text{N est composé pour toutes les valeurs de } n}$

   Le trinôme $x^2 + 7x + 10$ a deux racines réelles : -2 et -5, donc, $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$, pour tout réel x.
   Ainsi, pour tout entier relatif n, $N = (n^2 + 2)(n^2 + 5)$.
   N est un nombre premier si, et seulement si, $n^2 + 2 = 1$ ou $n^2 + 5 = 1$.
   Or, il n'existe pas d'entier relatif n tel que $n^2 = -1$, soit $n^2 + 2 = 1$, et il n'existe pas d'entier relatif n tel que $n^2 = -4$, soit $n^2 + 5 = 1$.
   Ainsi, N n'est pas un nombre premier pour tout entier n, N est donc composé.