Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir à la maison n° 5
À rendre vendredi 28 février 2014

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
   Note : deux nombres entiers sont premiers entre eux si le seul diviseur commun positif de ces deux nombres est 1.
2. Soit $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que si S_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors S_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que S_n soit divisible par 7.