Terminales S (enseignement de spécialité)
Devoir en classe n° 2
Mardi 19 novembre 2013

EXERCICE 1

On pose $M = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ -12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer $M^3 - 4M^2 + 5M$.
   b. En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} en fonction de M.
   c. En utilisant le résultat précédent, donner la matrice M^{-1} de façon explicite.
2. On donne le système :

$$(S)\begin{cases} -7x + 12y + 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 1 \\ -12x + 18y + 7z = -3 \end{cases}$$

   a. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   Écrire le système (S) sous forme matricielle : $AX = B$, en précisant les matrices A et B.
   b. Ce système a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?
   Résoudre le sytème en utilisant les résultats de la première question.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, où a est un nombre réel, et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $P^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = P^n \times \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n et a.
4. La suite (u_n) converge-t-elle quelle que soit la valeur de a ?
   Si la réponse est affirmative, quelle est la limite de (u_n) ?