# Exercices réservés aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité du baccalauréat scientifique

TERMINALE S (enseignement de spécialité)
LYCÉE CHARLES PONCET

Novembre 2013

## Table des matières

# 1 Métropole, septembre 2013

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté » ;

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté » ;

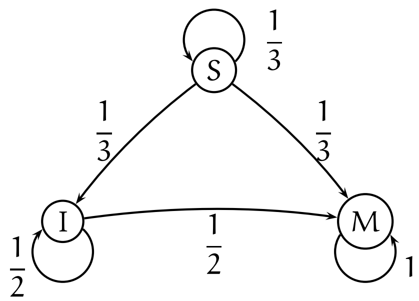
M : « l'individu est malade et infecté ».

## Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$ ;
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.




On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de $n$ semaines où $s_n$, $i_n$ et $m_n$ désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la $n$-ième semaine.
On a alors $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$\begin{cases} s_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n. \end{cases}$$

1. Écrire la matrice $A$ appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel $n$ :
$$P_{n+1} = P_n \times A.$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
3. Déterminer l'état probabiliste $P_4$ au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à $10^{-2}$ près.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

### Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note $Q_n$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de $n$ semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où $S_n$, $I_n$ et $M_n$ désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la $n$-ième semaine après la vaccination.
Pour tout entier naturel $n$, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89 \end{pmatrix}$ où les coefficients ont été arrondis à $10^{-2}$ près.

1. Exprimer $S_{n+1}$, $I_{n+1}$ et $M_{n+1}$ en fonction de $S_n$, $I_n$ et $M_n$.
2. Déterminer la constante réelle $k$ telle que $B^2 = kJ$ où $J$ est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   On en déduit que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.
3. a. Démontrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
   Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

## 2 Antilles-Guyane, septembre 2013

### Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X − 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

## Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

  On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $x_1$ correspond à la première lettre du mot et $x_2$ correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

  La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1\ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2\ (26) \text{ avec } 0 \leqslant z_2 \leqslant 25. \end{cases}$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

> **Exemple :**
>
> RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP
>
> Le bloc RE est donc codé en DP

1. Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

2. Soient $x_1$, $x_2$, $x_1'$, $x_2'$ quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x_1' + x_2'\ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x_1' + 2x_2'\ (26). \end{cases}$

   b. En déduire que $x_1 \equiv x_1'\ (26)$ et $x_2 \equiv x_2'\ (26)$ puis que $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.

3. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

   b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25. \end{cases}$

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

4. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.
On considère un bloc de deux lettres et on appelle $z_1$ et $z_2$ les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers $x_1$ et $x_2$ compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.
Soient $y_1'$ et $y_2'$ tels que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
Soient $x_1$ et $x_2$, les nombres entiers tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1' \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2' \ (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25. \end{cases}$
Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \ (26) \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \ (26). \end{cases}$
Conclure.

5. Décoder QC.

# 3 Métropole, juin 2013

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- L'effectif de la population est globalement constant.
- Chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel $n$, on note $v_n$ le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et $c_n$ le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et $c_n$.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.
On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où $a$, $b$ sont deux réels fixés et $Y = AX$.
Déterminer, en fonction de $a$ et $b$, les réels $c$ et $d$ tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
On peut donc en déduire que pour tout entier naturel $n$, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.
a. Calculer $PQ$ et $QP$. En déduire la matrice $P^{-1}$ en fonction de $Q$.
b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale $D$ que l'on précisera.
c. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que :
$$v_n = \frac{1}{6}\left(1 + 5 \times 0{,}94^n\right) v_0 + \frac{1}{6}\left(1 - 0{,}94^n\right) c_0.$$
Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

# 4 Asie, juin 2013

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

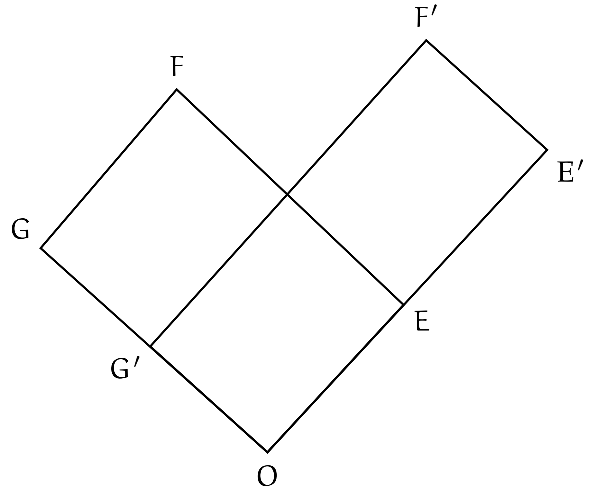



Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

## Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2 ; 2)$, $(-1 ; 5)$ et $(-3 ; 3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x ; y)$ du plan le point $M'(x' ; y')$, image du point M tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y. \end{cases}$$

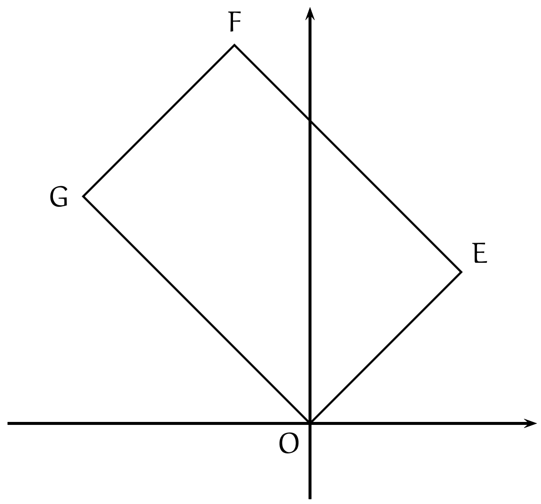



Figure 2

1. a. Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

2. Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée $A$, telle que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

## PARTIE B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

| | |
|---|---|
| Entrée | Saisir un entier naturel non nul $N$ |
| Initialisation | Affecter à $x$ la valeur $-1$<br>Affecter à $y$ la valeur 5 |
| Traitement | POUR $i$ allant de 1 à $N$<br>Affecter à $a$ la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$<br>Affecter à $b$ la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$<br>Affecter à $x$ la valeur $a$<br>Affecter à $y$ la valeur $b$<br>FIN POUR |
| Sortie | Afficher $x$, afficher $y$ |

2. On a obtenu le tableau suivant :

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2,5 | 7,25 | 15,625 | 31,812 5 | 63,906 3 | 2 047,997 1 | 65 535,999 9 |
| $y$ | 5,5 | 8,75 | 16,375 | 32,187 5 | 64,093 8 | 2 048,002 9 | 65 536,000 1 |

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

## PARTIE C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG.
On définit la suite des points $E_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right)$ désignent les coordonnées du point $E_{n+1}$.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice $A^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, le point $E_n$ est situé sur la droite d'équation $y = x$. On pourra utiliser que, pour tout entier naturel $n$, les coordonnées $(x_n ; y_n)$ du point $E_n$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   b. Démontrer que la longueur $OE_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## 5 Antilles-Guyane, juin 2013

On définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

1. Calculer $u_1$ et $v_1$.
2. On considère l'algorithme suivant :

| |
|---|
| Variables : $u$, $v$ et $w$ des nombres réels |
| $N$ et $k$ des nombres entiers |
| Initialisation : $u$ prend la valeur 0 |
| $v$ prend la valeur 1 |
| Début de l'algorithme |
| Entrer la valeur de $N$ |
| Pour $k$ variant de 1 à $N$ |
| $w$ prend la valeur $u$ |
| $u$ prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$ |
| $v$ prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$ |
| Fin du Pour |
| Afficher $u$ |
| Afficher $v$ |
| Fin de l'algorithme |

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

| $k$ | $w$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |

   b. Pour un nombre $N$ donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel $n$ on définit le vecteur colonne $X_n$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice $A$ par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = AX_n$.
b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel $n$.

4. On définit les matrices $P$, $P'$ et $B$ par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

   a. Calculer le produit $PP'$.
   On admet que $P'BP = A$.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $A^n = P'B^nP$.

   b. On admet que pour tout entier naturel $n$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
   En déduire l'expression de la matrice $A^n$ en fonction de $n$.

5. a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel $n$.
   En déduire les expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

   b. Déterminer alors les limites des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

# 6 Centres étrangers, juin 2013

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux iles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'ile A et 10 millions sur l'ile B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux iles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

– sur l'ile A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'ile A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'ile B au début de l'année précédente ;
– sur l'ile B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'ile A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'ile B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ (respectivement $b_n$) le nombre d' oiseaux (en millions) présents sur l'ile A (respectivement B) au début de l'année $(2013 + n)$.

## PARTIE A – algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux iles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
        Affecter à c la valeur (0,8a + 0,3b)
        Affecter à b la valeur (0,2a + 0,7b)
        Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur avant choisi l'année 2020.

$\star\star\star$ Algorithme lancé $\star\star\star$
En l'année 2013, $a$ prend la valeur 20 et $b$ prend la valeur 10
En l'année 2014, $a$ prend la valeur 19 et $b$ prend la valeur 11
En l'année 2015, $a$ prend la valeur 18,5 et $b$ prend la valeur 11,5
En l'année 2016, $a$ prend la valeur 18,25 et $b$ prend la valeur 11,75
En l'année 2017, $a$ prend la valeur 18,125 et $b$ prend la valeur 11,875
En l'année 2018, $a$ prend la valeur 18,042 5 et $b$ prend la valeur 11,937 5
En l'année 2019, $a$ prend la valeur 18,031 25 et $b$ prend la valeur 11,968 75
En l'année 2020, $a$ prend la valeur 18,015 625 et $b$ prend la valeur 11,984 375
$\star\star\star$ Algorithme terminé $\star\star\star$

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

**PARTIE B – étude mathématique**

On note $U_n$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = MU_n$, où $M$ est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.
   On admet alors que $U_n = M^nU_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :
$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}5^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}.$$
   On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice $M^n$.
3. Exprimer $a_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'ile A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

## 7 Polynésie, juin 2013

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la $n$-ième année après 2013, et $b_n$ le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la $n$-ième année après 2013. Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70. \end{cases}$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel $n$, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer $U_1$.

   b. Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

   c. Déterminer la matrice $U$ telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $V_{n+1} = M \times V_n$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel $n$ :

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0{,}8^n - \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0{,}8^n + \dfrac{140}{3} \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

   a. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $U_n$ en fonction de $n$ et en déduire la limite de la suite $(a_n)$.

   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

## 8 Amérique du Nord, mai 2013

### PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables : | $a$ est un entier naturel |
| | $b$ est un entier naturel |
| | $c$ est un entier naturel |
| Initialisation : | Affecter à $c$ la valeur $0$ |
| | Demander la valeur de $a$ |
| | Demander la valeur de $b$ |
| Traitement : | Tant que $a \geqslant b$ |
| |     Affecter à $c$ la valeur $c + 1$ |
| |     Affecter à $a$ la valeur $a - b$ |
| | Fin de Tant que |
| Sortie : | Afficher $c$ |
| | Afficher $a$ |

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

**PARTIE B**

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

*Étape 1 :* À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre $m$ correspondant dans le tableau.

*Étape 2 :* On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note $p$.

*Étape 3 :* Au nombre $p$, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de $m$ entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de $p$, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

**PARTIE C**

1. Trouver un nombre entier $x$ tel que $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \text{ est équivalent à } m \equiv 3p - 15 \pmod{26}.$$

3. Décoder alors la lettre B.

## 9 Liban, mai 2013

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer $u_2$ et $u_3$.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on souhaite calculer $u_n$ à l'aide de l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels |
| | $i$ et $n$ sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 |
| **Initialisation :** | $a$ prend la valeur 3 |
| | $b$ prend la valeur 8 |
| **Traitement :** | Saisir $n$ |
| | Pour $i$ variant de 2 à $n$ faire |
| |     $c$ prend la valeur $a$ |
| |     $a$ prend la valeur $b$ |
| |     $b$ prend la valeur … |
| | Fin Pour |
| **Sortie :** | Afficher $b$ |

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

| $n$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 4 502 | 13 378 | 39 878 | 119 122 | 356 342 | 1 066 978 | 3 196 838 | 9 582 322 | 28 730 582 |

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite $(u_n)$ ?

3. Pour tout entier naturel $n$, on note $C_n$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   On note $A$ la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel $n$, $C_{n+1} = AC_n$.
   Déterminer $A$ et prouver que, pour tout entier naturel $n$, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Calculer $QP$.
   On admet que $A = PDQ$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $A^n = PD^nQ$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.
   Pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

   En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   La suite $(u_n)$ a-t-elle une limite ?

## 10 Pondichéry, avril 2013

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel $n$, on note $j_n$ le nombre d'animaux jeunes après $n$ années d'observation et $a_n$ le nombre d'animaux adultes après $n$ années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} &= 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} &= 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n. \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = A \times U_n$.
   b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   c. Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $U_n$ en fonction de $A^n$ et de $U_0$.

2. On introduit les matrices suivantes : $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. On admet que la matrice $Q$ est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.

      Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.
   b. Montrer par récurrence sur $n$ que pour tout entier naturel $n$ non nul, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.
   c. Pour tout entier naturel $n$ non nul, déterminer $D^n$ en fonction de $n$.

3. On admet que pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$$

a. En déduire les expressions de $j_n$ et $a_n$ en fonction de $n$ et déterminer les limites de ces deux suites.

b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

## 11 Polynésie, juin 2012

### Partie A

On considère l'équation $(E) : 25x - 108y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(13\ ;\ 3)$ est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E)$.

### Partie B

Dans cette partie, $a$ désigne un entier naturel et les nombres $c$ et $g$ sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si $p$ est un nombre premier et $a$ un entier non divisible par $p$, alors $a^{p-1}$ est congru à 1 modulo $p$ que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit $x$ un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. a. On suppose que $a$ n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   b. On suppose que $a$ est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   c. On admet que pour tout entier naturel $a$, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

### Partie C

On note $A$ l'ensemble des entiers naturels $a$ tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à $A$, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier $a$ de $A$, l'entier $r$ tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à $r$, l'entier $r_1$ tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 ; 59.
   Décoder ce message.

## 12 Antilles-Guyane, juin 2012 (sujet partiel)

*Les trois questions sont indépendantes.*

1. a. Vérifier que le couple $(4\ ;\ 6)$ est une solution de l'équation $(E) : 11x - 5y = 14$.

   b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'équation $(E)$.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,011^{2\,012}$ par 7.

3. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{A}{N}$.

   A et N sont des entiers naturels
   Saisir A
   N prend la valeur 1
   Tant que $N \leqslant \sqrt{A}$
   Si $\dfrac{A}{N} - \text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right) = 0$ alors afficher N et $\dfrac{A}{N}$
   Fin si
   N prend la valeur $N + 1$
   Fin Tant que

   Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$ ?
   Que donne cet algorithme dans le cas général ?

## 13 Centres étrangers, juin 2012 (sujet partiel)

*Les trois questions sont indépendantes.*
*Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.*
*Toute trace de recherche sera valorisée.*

1. On considère l'équation $(E) : 3x - 2y = 1$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   **Affirmation :** les solutions de l'équation $(E)$ sont les couples $(9+2k\ ;\ 13+3k)$, avec $k$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.
2. Soit $n$ un entier naturel. On considère les deux entiers $a$ et $b$ définis par $a = 3n+1$ et $b = 2n+3$.
   **Affirmation :** le PGCD de $a$ et $b$ est égal à 7 si et seulement si $n$ est congru à 2 modulo 7.
3. Soit $n$ un entier naturel. On considère les deux entiers $a$ et $b$ définis par $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.
   **Affirmation :** pour tout entier naturel $n$, le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

## 14 Amérique du Sud, novembre 2011 (sujet partiel)

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

- **Proposition 1 :** « Le reste de la division euclidienne de $2\,011^{2\,011}$ par 7 est 2 ».
- Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers relatifs non nuls.
  **Proposition 2 :** « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $\text{PGCD}(a\ ;\ b) = 3$ ».
- Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 5.
  **Proposition 3 :** « L'entier $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais un nombre premier ».

## 15 France métropolitaine, juin 2011

### PARTIE A – restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient $a$, $b$, $c$ des entiers relatifs.
Si $a$ divise le produit $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a$ divise $c$.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels tels que $p$ et $q$ soient premiers entre eux.
   Déduire du théorème de GAUSS que, si $a$ est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \pmod{p}$ et $a \equiv 0 \pmod{q}$, alors $a \equiv 0 \pmod{pq}$.

### PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs $n$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 & [17] \\ n \equiv 3 & [5]. \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$
   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.
   b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
      Démontrer que $n_0$ appartient à $\mathscr{S}$.
   c. Donner un exemple d'entier $n_0$ appartenant à $\mathscr{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$
   a. Soit $n$ un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
      Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.
   b. En déduire qu'un entier relatif $n$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où $k$ est un entier relatif.
3. Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
   Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?

## 16 Antilles-Guyane, juin 2011

1. On considère l'équation $(E) : 11x - 7y = 5$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   b. En déduire une solution particulière de l'équation $(E)$.
   c. Résoudre l'équation $(E)$.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation $(F) : 11x^2 - 7y^2 = 5$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de $(F)$, alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient $x$ et $y$ des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

| Modulo 5, $x$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Modulo 5, $x^2$ est congru à | | | | | |

| Modulo 5, $y$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Modulo 5, $2y^2$ est congru à | | | | | |

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^2$ et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de $(F)$, alors $x$ et $y$ sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si $x$ et $y$ sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de $(F)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $(F)$ ?

## 17 Polynésie, juin 2010

*Les parties A et B sont indépendantes*

### Partie A

On considère l'équation $(E) : 7x - 6y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation $(E)$.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation $(E)$.

### Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n ; m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation $(F) : 7^n - 3 \times 2^m = 1$.

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation $(F)$ alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation $(F)$ alors $n$ est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation $(F)$ alors $7^n \equiv 1 \pmod 5$.

d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n ; m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation $(F)$ ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation $(F)$.

## 18 Nouvelle-Calédonie, novembre 2009

*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

Soit $n$ un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation $(E)$ : $3x + 7y = 10^{2n}$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation $(E)$.
   b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de $(E)$.
2. On considère l'équation $(G)$ : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   a. Montrer que $100 \equiv 2 \pmod 7$.
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de $(G)$ alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod 7$.
   b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

| Reste de la division euclidienne de $x$ par 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7 | | | | | | | |

   c. Démontrer que $2^n$ est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation $(G)$ n'admet pas de solution.

## 19 France métropolitaine, septembre 2009

1. a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
   b. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{10}$ par 11.
   c. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009} + 2\,009$ par 11.
2. On désigne par $p$ un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul $n$ le nombre $A_n = 2^n + p$.
   On note $d_n$ le PGCD de $A_n$ et $A_{n+1}$.
   a. Montrer que $d_n$ divise $2^n$.
   b. Déterminer la parité de $A_n$ en fonction de celle de $p$. Justifier.
   c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la parité de $d_n$ en fonction de celle de $p$.
   En déduire le PGCD de $2^{2\,009} + 2\,009$ et $2^{2\,010} + 2\,009$.

## 20 Pondichéry, avril 2010 (sujet partiel)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier des couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3.$$

Soit $(a\ ;\ b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$. On note $u$ et $v$ les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que $v$ divise $u$, puis que $v = 1$.

3. Soit $(a\ ;\ b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
   Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si $a$ et $b$ sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si $n$ est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \pmod 7$ ou $n \equiv 1 \pmod 7$.

## 21 France métropolitaine, juin 2009

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation $(E) : 8x - 5y = 3$.
   b. Soit $m$ un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p\ ;\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
      Montrer que le couple $(p\ ;\ q)$ est solution de l'équation $(E)$ et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.
   c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers $m$ supérieurs à $2\,000$.
2. a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $k$ on a $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$.
   b. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod 7$.
   b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.