La loi binomiale

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Octobre 2012

---

1 Loi de BERNOULLI [1]

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : l'une, S*, appelée « succès » et l'autre,* $\overline{S}$*, appelée « échec ». On pose* $p = P(S)$ *et* $q = 1 - p = P\left(\overline{S}\right)$*.*

• *Cette expérience est une* épreuve de BERNOULLI *de paramètre* p*.*

• *Dans une épreuve de* BERNOULLI*, la variable aléatoire* X *qui prend la valeur* 1 *en cas de succès et* 0 *en cas d'échec est une* variable aléatoire de BERNOULLI.
Sa loi de probabilité est appelée loi de probabilité de BERNOULLI de paramètre p.

1.2 Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire de BERNOULLI

✏ Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X qui suit une loi de BERNOULLI de paramètre p.

2 Loi binomiale

2.1 Schéma de BERNOULLI et loi binomiale

Définition 2.1.1
Soit n *un entier naturel non nul et soit* p *un nombre réel de l'intervalle* $[0\ ;\ 1]$*.*

• *Un* schéma de BERNOULLI de paramètres n et p *est l'expérience aléatoire qui consiste à répéter* n *fois de manière indépendante une épreuve de* BERNOULLI *de paramètre* p*.*

• *La loi de probabilité de la variable aléatoire* X *égale au nombre de succès au cours de ces* n *épreuves se nomme la* loi binomiale de paramètre n et p. *On note cette loi* $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$*.*

✏ Modéliser à l'aide d'un arbre pondéré les cas $n = 2$ et $n = 3$.

---

1. BERNOULLI, famille de mathématiciens originaire d'Anvers et qui vers la fin du XVI^{e} siècle se réfugia à Bâle. Jakob BERNOULLI (1654 – 1705) : ses travaux concernent, en particulier, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul des probabilités.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 2.2.1
On considère un entier naturel n non nul et k un nombre entier compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ *est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de* BERNOULLI.

- On a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$. On pose $\binom{0}{0} = 1$.
  $\binom{n}{k}$ est également le nombre combinaisons de k éléments parmi n.

Théorème 2.2.1 (relations de PASCAL[2])
Quels que soient les entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ et } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

2.3 Formule générale de la loi binomiale

Théorème 2.3.1
Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors quel que soit l'entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p.$$

- En particulier $P(X = n) = p^n$, $P(X = 0) = q^n$ et $P(X \geqslant 1) = 1 - q^n$.

2.4 Espérance mathématique et variance

Théorème 2.4.1 (admis conformément aux instructions officielles)
Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

L'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p sont :

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercice d'application

Lors du second tour d'une élection municipale, les habitants d'une ville importante doivent choisir entre deux listes : 42 % d'entre eux ont voté pour la liste A.

Le jour de ces élections, cinq journalistes se sont rendus sur le terrain, en vue d'un reportage. Chacun d'entre eux a interrogé au hasard une personne qui venait de participer au vote.

Calculer à 0,001 près, les probabilités des événements suivants :

E : « Aucun des journalistes n'a interrogé une personne qui a voté pour la liste A ».
F : « Exactement deux des cinq journalistes ont interrogé quelqu'un qui a voté pour la liste A ».
G : « Au moins quatre des cinq journalistes ont interrogé quelqu'un ayant voté pour la liste A ».

2. Blaise PASCAL (1623 – 1662) mathématicien, physicien et philosophe français. Il est le créateur avec Pierre *Simon* de FERMAT du calcul des probabilités. Ses autres travaux mathématiques ont portés sur la géométrie, le calcul intégral.