Probabilités conditionnelles

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Octobre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition

Définition 1.1.1
Soient Ω *un univers fini et* A *un évènement de probabilité non nulle. Si* B *est un évènement de* Ω*, la* probabilité conditionnelle de B sachant A *est le nombre :*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

☛ L'ancienne notation utilisée pour désigner la probabilité conditionnelle de B sachant A est $P(B|A)$.
La formulation « probabilité conditionnelle de B sachant A » signifie « probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé ».

1.2 Propriétés des probabilités conditionnelles

Propriété 1.2.1
A *et* B *sont deux évènements d'un univers fini* Ω *et* $A \neq \varnothing$.

Dans une situation d'équiprobabilité, $P_A(B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$.

Propriété 1.2.2
A *et* B *sont deux évènements d'un univers* Ω.

- *Si* $P(A) \neq 0$ *alors* $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
- *Si* $P(B) \neq 0$ *alors* $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Théorème 1.2.1
Si A *est un évènement de probabilité non nulle, alors, quels que soient les évènements* B *et* C *:*

• $P_A(\varnothing) = 0$ • $P_A(A) = 1$ • $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$ • $P_A\left(B \cup C\right) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

☛ L'application $B \longmapsto P_A(B)$ est donc une probabilité définie sur l'univers A.

✏ Démontrer le théorème 1.2.1.

1.3 Utilisation des tableaux et des arbres pondérés

Un tableau à double entrée permet de calculer les probabilités conditionnelles (lorsqu'il n'y a que deux évènements A et B).

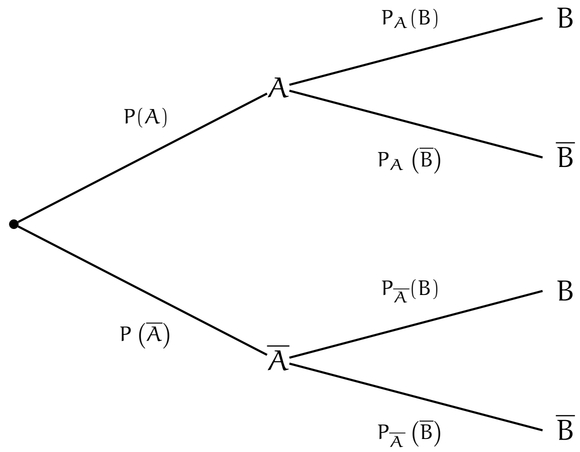
	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P\left(\overline{A} \cap B\right)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P\left(A \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{B}\right)$
Total	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Exemple

Compléter le tableau ci-dessous et calculer $P_B(A)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$.

	A	$\overline{A}$	Total
B		0,25	
$\overline{B}$			0,6
Total	0,3		

Un arbre pondéré (ou arbre de probabilités) permet de décrire une situation où interviennent les probabilités conditionnelles.

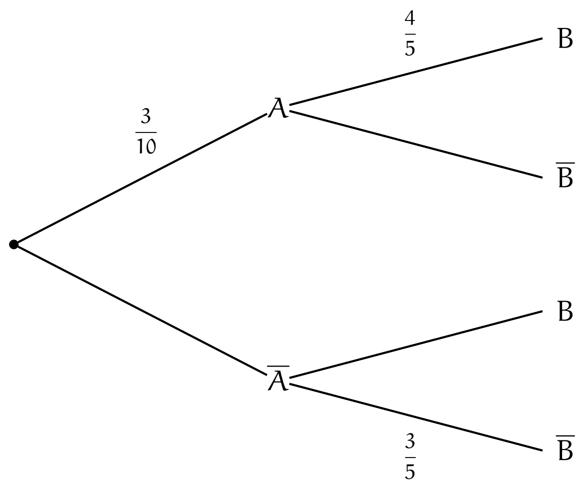


Pour un arbre pondéré :

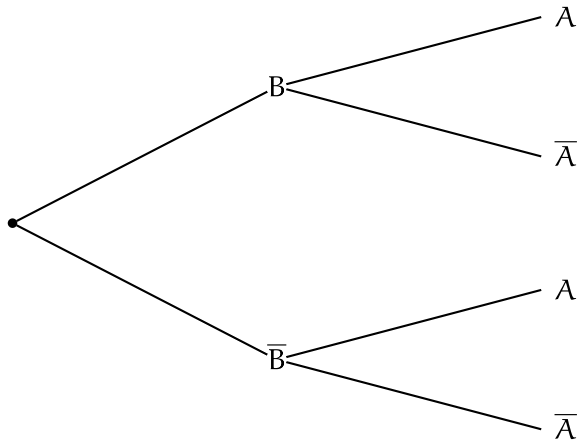
- Une *branche* relie deux *nœuds*, un *chemin* est une suite de branches.
- Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.
- La probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités de chaque branche.
- La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Pour obtenir la probabilité d'un évènement, on additionne les probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

Exemple

Compléter l'arbre ci-dessous, puis calculer $P(B)$, $P_B(A)$ et $P_{\overline{B}}(A)$.



À l'aide des résultats précédents, compléter l'arbre ci-dessous.



2 Formule des probabilités totales

2.1 Systèmes complets d'évènements

Définition 2.1.1
On appelle système complet d'évènements*, tout ensemble d'évènements (non vides) de Ω, incompatibles deux à deux et dont la réunion est Ω.*

☛ $A_1, A_2, \ldots, A_p$ forment un système complets d'évènements de Ω si et seulement si :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega \text{ et } A_i \cap A_j = \varnothing \text{ lorsque } i \neq j.$$

En particulier si A est un évènement, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements de Ω.

La notion de système complet d'évènements correspond à la notion de *partition* pour la théorie des ensembles.

2.2 Formule des probabilités totales

Théorème 2.2.1
Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ forment un système complets d'évènements de Ω, la probabilité d'un évènement B est :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_p).$$

En particulier :

$$P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right).$$

✏ La formule des probabilités totales correspond à la dernière propriété des arbres pondérés.

3 Indépendance

3.1 Évènements indépendants

Définition 3.1.1
Deux évènements A et B sont indépendants *si et seulement si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 3.1.1
- *Lorsque* $P(A) \neq 0$, A *et* B *sont indépendants si et seulement si* $P_A(B) = P(B)$.
- *Lorsque* $P(B) \neq 0$, A *et* B *sont indépendants si et seulement si* $P_B(A) = P(A)$.

✏ Démontrer la propriété 3.1.1.

Démontrer que deux évènements incompatibles et de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.

Exemple

Le tableau suivant donne la répartition de 150 stagiaires en fonction de la langue étudiée et de l'activité sportive choisie.

	Tennis	Équitation	Voile
Anglais	45	18	27
Chinois	33	9	18

On choisit au hasard un stagiaire et on note :
- A l'évènement : « ce stagiaire étudie l'anglais » et $C = \overline{A}$ l'évènement : « ce stagiaire étudie le chinois » ;
- T l'évènement « ce stagiaire pratique le tennis » et V l'évènement : « ce stagiaire pratique la voile ».

1. Les évènements C et T sont-ils indépendants ?
2. Les évènements A et V sont-ils indépendants ?

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

3.2 Indépendance et évènements contraires

Théorème 3.2.1
Si A et B sont deux évènements indépendants, il en est de même pour A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, ou $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

✏ Démontrer le théorème 3.2.1.

4 Exercices du baccalauréat scientifique

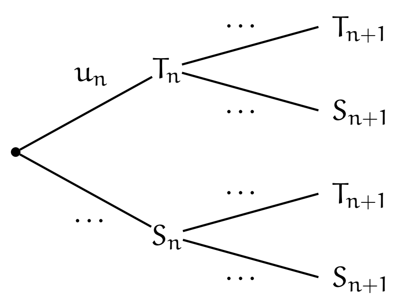
4.1 Probabilités et suites numériques

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8. Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les évènements :
- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».
- S_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage ».

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = P(T_n)$ où $P(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. a. Donner les valeurs de $P(T_1)$, $P(S_1)$ et des probabilités conditionnelles $P_{T_1}(T_2)$, $P_{S_1}(T_2)$ puis montrer que $P(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   b. Recopier et compléter l'arbre suivant :



   c. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.
   d. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise précédemment ?

4.2 La kermesse

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune. La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges, la roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges. Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. On note E et F les évènements :
   – E : « à l'issue de la partie, les deux cases obtenues sont rouges » ;
   – F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

   Montrer que $P(E) = 0{,}02$ et $P(F) = 0{,}17$.

3. Si les deux cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 euros, si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 euros, sinon il ne reçoit rien. On désigne par X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 euro).

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

   a. Montrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B vérifie $p_n = 1 - (0{,}9)^n$.

   b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

   c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

4.3 L'urne

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

– un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
– un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
– un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

   Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

   a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $P(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

   b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.

   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.

   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

4.4 Les cubes

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0{,}12 + 0{,}004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.