Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Novembre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Parallélisme dans l'espace

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
Deux droites sont parallèles *si elles sont confondues ou si elles sont coplanaires et n'ont pas de point commun (on dit alors qu'elles sont* strictement parallèles*).*

Définition 1.1.2
Deux plans sont parallèles *s'ils sont confondus ou s'ils n'ont pas de point commun (on dit alors qu'ils sont* strictement parallèles*).*

Définition 1.1.3
Une droite d *est* parallèle *à un plan* P *si* d *est située dans* P *ou si* d *et* P *n'ont pas de point commun (on dit alors que* d *est* strictement parallèle *à* P*).*

1.2 Position relative de droites et plans

Propriété 1.2.1
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles), soit non coplanaires.

- ✏ Représenter un cube $ABCDEFGH$ et déterminer deux droites sécantes, strictement parallèles, non coplanaires.
- ☛ Ainsi deux droites sont parallèles quand elles sont coplanaires et non sécantes.

Propriété 1.2.2
Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

- ✏ Avec le cube $ABCDEFGH$, déterminer une droite et un plan sécants, une droite et un plan parallèles.
- ☛ Ainsi une droite et un plan sont parallèles quand ils ne sont pas sécants.

Propriété 1.2.3
Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

- ✏ Avec le cube $ABCDEFGH$, déterminer deux plans sécants, deux plans parallèles.
- ☛ Ainsi deux plans sont parallèles quand ils ne sont pas sécants.

1.3 Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété 1.3.1
Si une droite d_1 *est parallèle à une droite* d_2 *située dans un plan* P *alors* d_1 *est parallèle à* P*.*

- ✏ Représenter la situation de la propriété 1.3.1 et démontrer cette propriété par l'absurde.

1.4 Parallélisme de deux droites

Théorème 1.4.1 (admis)

1. *Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.*
2. *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une des deux droites coupe l'autre.*

Propriété 1.4.2
Si P *et* P' *sont deux plans parallèles, tout plan* Q *qui coupe* P *coupe* P' *et les droites d'intersection sont parallèles.*

Théorème 1.4.3 (théorème du toit)
Si une droite d *est parallèle à deux plans sécants* P *et* Q *alors* d *est parallèle à la droite d'intersection de* P *et* Q.

1.5 Parallélisme de deux plans

Théorème 1.5.1 (admis)
Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Propriété 1.5.2
Si deux droites sécantes d_1 *et* d_2 *d'un plan* P *sont parallèles à un plan* P' *alors les plans* P *et* P' *sont parallèles.*

Propriété 1.5.3
Si deux droites sécantes d_1 *et* d_2 *d'un plan* P *sont parallèles à deux droites sécantes* d_1' *et* d_2' *d'un plan* P' *alors les plans* P *et* P' *sont parallèles.*

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 2.1.1
Deux droites de l'espace sont orthogonales *si leurs parallèles menées d'un point quelconque sont perpendiculaires.*

✏ Représenter un cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ et déterminer deux droites perpendiculaires et deux droites orthogonales mais non perpendiculaires.

☛ Ainsi il ne faut pas confondre deux droites orthogonales et deux droites perpendiculaires :
- deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes ;
- deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et, par conséquent, pas nécessairement sécantes.

Propriété 2.1.1
Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

2.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 2.2.1
Une droite est perpendiculaire *à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*

Théorème 2.2.1
Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème 2.2.2 (admis)
1. *Il existe une unique droite* d *passant par un point* A *et perpendiculaire à un plan* P *donné.*
   Le point d'intersection de d *et* P *est le* projeté orthogonal *de* A *sur* P.
2. *Il existe un unique plan* P *passant par un point* A *et perpendiculaire à une droite* d *donnée.*
   Le point d'intersection de d *et* P *est le* projeté orthogonal *de* A *sur* d.

Propriété 2.2.3
Si deux droites d *et* d' *sont parallèles, tout plan* P *perpendiculaire à* d *est perpendiculaire à* d'.

Propriété 2.2.4
Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan alors elles sont parallèles.

Propriété 2.2.5
Si deux plans P *et* P' *sont parallèles, toute droite* d *perpendiculaire à* P *est perpendiculaire à* P'.

2.3 Plan médiateur

Définition 2.3.1
A *et* B *étant deux points distincts, le* plan médiateur *du segment* $[AB]$ *est le plan passant par le milieu* I *de* $[AB]$ *et perpendiculaire à la droite* (AB).

Théorème 2.3.1 (admis)
A *et* B *étant deux points distincts, le plan médiateur du segment* $[AB]$ *est l'ensemble des points équidistants de* A *et* B.