Loi exponentielle
Lois normales

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Mars 2014

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Généralisation de la notion de loi de probabilité à un intervalle non borné

1.1 Définitions et exemple

Définition 1.1.1
Soit $I = [a\ ;\ +\infty[$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.
Une fonction f*, continue, positive sur* I *telle que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = 1$ *est une* densité de probabilité.

Définition 1.1.2
Dire que P est le loi de probabilité de densité f de X *signifie que pour tout intervalle* $J = [c\ ;\ d]$ *inclus dans* I *(donc* $a \leqslant c \leqslant d$*), on a :*

$$\boxed{P(X \in J) = \int_c^d f(x)\,dx.}$$

☛ Les propriétés des lois à densité sur un intervalle borné s'étendent au cas de $I = [a\ ;\ +\infty[$.
Si $c \in I$ alors $P(X > c) = 1 - P(a \leqslant X \leqslant c) = 1 - \int_a^c f(x)\,dx$.

Exemple

a. Montrer que $x \longmapsto f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$.
b. X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour densité f.
Calculer $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$.

1.2 Espérance mathématique

Définition 1.2.1
Soit $I = [a\ ;\ +\infty[$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.
Si X *est une variable aléatoire continue dont la loi de probabilité a pour densité la fonction* f *sur* I *alors l'*espérance mathématique *de* X *est le nombre :*

$$\boxed{E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x t f(t)\,dt.}$$

✏ En utilisant votre calculatrice, donner une approximation décimale de l'espérance mathématique de la variable aléatoire de l'exemple du paragraphe 1.1 (l'intégrale n'est pas exprimable avec les fonctions usuelles).

2 Loi exponentielle

2.1 Définition

Préliminaire

λ est un nombre réel strictement positif. On définit la fonction φ pour tout nombre réel x strictement positif par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

a. Déterminer une primitive F de $t \longmapsto f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
b. Calculer $\varphi(x)$ pour x strictement positif.

c. Déterminer la limite de φ en $+\infty$ (on rappelle que $\lambda > 0$).

☛ On peut en déduire que $x \longmapsto f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$ puisque f est continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

Définition 2.1.1
λ est un nombre réel strictement positif.
Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle *de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$ si sa densité de probabilité est la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par* $\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.}$

2.2 Propriétés

Proposition 2.2.1
λ est un nombre réel strictement positif.
Si la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors, pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$:

- $P(a \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ *;*
- $P(T \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$ *et* $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.

✏ Démontrer la proposition 2.2.1.

Théorème 2.2.2 (propriété de la durée de vie sans vieillissement)
La loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.
Ainsi, si la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), alors, pour tout réels t et h positifs :

$$P_{\{T \geqslant t\}}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h).$$

✏ Démontrer le théorème 2.2.2.
Pour cela on pose $A = \{T \geqslant t\}$ et $B = \{T \geqslant t + h\}$.
Déterminer $A \cap B$ et calculer $P(A)$, $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$ pour conclure.

☛ La réciproque est vraie : une loi de durée de vie sans vieillissement est une loi exponentielle.

Calcul de l'espérance mathématique

T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note f la densité de probabilité.
On considère la fonction g définie pour tout réel t strictement positif par $g(t) = tf(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

a. Déterminer les réels α et β pour que la fonction $t \longmapsto G(t) = (\alpha t + \beta)e^{-\lambda t}$ soit une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

c. Déterminer l'espérance mathématique de T, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt$.

Théorème 2.2.3 (espérance mathématique d'une loi exponentielle)
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) est $\boxed{E(T) = \dfrac{1}{\lambda}.}$

3 Loi normale centrée réduite

3.1 Théorème de MOIVRE – LAPLACE

Introduction

Proposition 3.1.1

Si X est une variable aléatoire ayant pour espérance mathématique $m = E(X)$ et pour écart-type $\sigma = \sigma(X)$ avec $\sigma > 0$ alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ a pour espérance mathématique $E(T) = 0$ et pour écart-type $\sigma(T) = 1$.

On dit que T est une variable aléatoire centrée réduite.

✏ Démontrer la proposition 3.1.1 en utilisant les deux propriétés suivantes :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $V(aX + b) = a^2V(X)$.

On considère la variable X_n qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, avec n un entier naturel non nul et $p \in]0\,;\,1[$.

On a donc $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$, ainsi la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

Lorsque n augmente, l'histogramme prend la forme d'un courbe « en cloche » de GAUSS.

Cette propriété est justifiée par le théorème admis suivant :

Théorème 3.1.2 (théorème de MOIVRE – LAPLACE)

Soit $p \in]0\,;\,1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Si $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ alors pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.}$$

3.2 Définition de la loi normale centrée réduite

Définition 3.2.1

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite*, notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, lorsque la densité de probabilité est la fonction f définie pour tout réel x par :*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

Propriétés de f

- f est continue et positive sur $\mathbb{R}$;
- f est paire, donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (le repère étant orthogonal) ;
- f possède un maximum sur $\mathbb{R}$ en 0 ;
- « l'aire sous la courbe » de f sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 (*propriété admise*).

3.3 Propriétés de la loi normale centrée réduite

Proposition 3.3.1
Si X suit la loi normale centrée réduite alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

3.3.1 Utilisation de la calculatrice

On suppose que X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, calculer, à 10^{-5} près :

- $P(-3{,}1 \leqslant X \leqslant 1{,}2)$, $P(X \leqslant 1{,}1)$ et $P(X > 1{,}5)$;
- le nombre x_1 tel que $P(X \leqslant x_1) = 0{,}375$, le nombre x_2 tel que $P(X > x_2) = 0{,}41$ et le nombre x_3 tel que $P(0 \leqslant X \leqslant x_3) = 0{,}42$.

3.3.2 Règles de calcul

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, pour tout réel t on définit la fonction Φ par :

$$\Phi(t) = P(X \leqslant t) = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

(Φ est la fonction de répartition de X).

On a, pour tout réel a :

- $P(X \leqslant a) = P(X \geqslant a)$;
- $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$;
- $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$ (avec $a > 0$).

☛ La première propriété découle de la symétrie de la représentation graphique de la densité f.

✏ Démontrer les deux autres propriétés.

3.3.3 Valeurs remarquables

Théorème 3.3.2
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, pour tout réel $\alpha \in \,]0\,;\,1[$ il existe une seul réel u_α strictement positif tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

☛ Pour démontrer le théorème 3.3.2 on applique le théorème de la bijection à la fonction $2F$ où F est la primitive de la densité f qui s'annule en 0.

Corollaire 3.3.3
À 10^{-2} près, $u_{0,05} = 1{,}96$ et $u_{0,01} = 2{,}58$.

✏ Justifier que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ équivaut à $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et retrouver les valeurs approchées de $u_{0,05}$ et de $u_{0,01}$.

3.3.4 Espérance mathématique

Proposition 3.3.4
Si la variable aléatoire X sui la loi normale centrée réduite alors $E(X) = 0$.

✏ Déterminer une primitive de $x \longmapsto g(x) = xf(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et calculer $E(X)$.

☛ On démontre que la variance est $V(X) = 1$ et l'écart-type est $\sigma(X) = 1$.

4 Lois normales

4.1 Définition

Définition 4.1.1
μ est un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 *si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.*

☛ Notations : $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ (en terminale S) ou $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma)$ (en BTS).

4.2 Propriétés

Théorème 4.2.1
Si la variable aléatoire suit la loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ alors $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.

☛ On a $X = \sigma Y + \mu$ avec Y qui suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, ainsi, $E(X) = \sigma E(Y) + \mu = \sigma \times 0 + \mu = \mu$ et $V(X) = \sigma^2 V(Y) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$.

Théorème 4.2.2 (intervalles un σ, deux σ et trois σ)
Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, on a, à 10^{-3} près :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0{,}683$;
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}954$;
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0{,}997$.

✏ Justifier que, pour tout réel k strictement positif, $P(\mu - k \leqslant X \leqslant \mu - k) = 2\Phi\left(\dfrac{k}{\sigma}\right) - 1$. En déduire les trois valeurs approchées.