La fonction exponentielle

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Janvier 2013

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Introduction de la fonction exponentielle

1.1 Fonction f telle que $f' = f$ vérifiant $f(0) = 1$

Lemme
S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

✏ En calculant la dérivée de $x \longmapsto g(x) = f(x)f(-x)$ justifier que, pour tout réel x, $g(x) = 1$. Conclure ensuite.

Théorème 1.1.1
Il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

☛ L'existence de la fonction f est admise provisoirement. Elle sera justifiée lors de l'étude de la fonction logarithme népérien.

✏ On raisonne par l'absurde, on suppose donc qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f_1' = f_1$ et $f_1(0) = 1$, $f_2' = f_2$ et $f_2(0) = 1$.
En calculant la dérivée de $x \longmapsto q(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ démontrer que $f_1 = f_2$.

1.2 Définition de la fonction exponentielle

Définition 1.2.1
On appelle fonction exponentielle *l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*
Cette fonction est notée exp.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Conséquences de la définition

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

2.2 Propriété fondamentale

Théorème 2.2.1
Quels que soient les réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

✏ Démontrer le théorème 2.2.1 en calculant la dérivée de $x \longmapsto g(x) = \exp(a+b-x) \times \exp(x)$.

Corollaire 2.2.2
La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et quel que soit le réel a, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.

✏ Démontrer le corollaire 2.2.2 en remarquant que $a + (-a) = 0$ et en utilisant le théorème 2.2.1.

Corollaire 2.2.3
Quels que soient les réels a et b, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

✏ Démontrer le corollaire 2.2.3 en remarquant que $(a-b)+b = a$ et en utilisant le théorème 2.2.1.

Corollaire 2.2.4
Quels que soient le réel a et l'entier relatif n, $\exp(na) = [\exp(a)]^n$.

✏ En utilisant le théorème 2.2.1 et un raisonnement par récurrence, démontrer le corollaire 2.2.4 lorsque n est un entier naturel.
Calculer $\exp(-na)$, n étant un entier naturel en utilisant le corollaire 2.2.2.

Corollaire 2.2.5
Quels que soient le réel x, $\exp(x) > 0$.

✏ Démontrer le corollaire 2.2.5 en remarquant que $x = 2 \times \dfrac{x}{2}$ et en utilisant le théorème 2.2.1.

2.3 Notation e^x

2.3.1 Le nombre e

Définition 2.3.1
On note e *l'image de* 1 *par la fonction exponentielle, ainsi* $\exp(1) = e$.

☛ e est le nombre de NEPER[1], la notation e a été inventée par EULER[2] en 1728.
e est un nombre irrationnel et *transcendant*[3], on a $e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,2\ldots$

2.3.2 Notation e^x

Pour tout entier relatif n on a $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$ soit $\exp(n) = e^n$. On étend cette propriété à l'ensemble des nombres réels.

Théorème 2.3.1
Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$.

2.3.3 Autre écriture des propriétés

- La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$.
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- Pour tous nombres réels a et b, pour tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad \text{et} \quad (e^a)^n = e^{na}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

2.4 Étude analytique

2.4.1 Sens de variation

✏ Déterminer le sens de variation de la fonction exponentielle.

Théorème 2.4.1
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. John NEPER ou NAPIER, baron de Merchiston, théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais, inventeur des logarithmes (Merchiston 1550 – *id.* 1617).
2. Leonhard Paul EULER, mathématicien et physicien suisse (Bâle 1707 – Saint-Pétersbourg 1783). Un des plus grand mathématicien de tous les temps et l'un des plus prolifique.
3. Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas algébrique, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

2.4.2 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$.

b. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$. En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

c. En posant $y = -x$, déterminer la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Théorème 2.4.2

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

2.4.3 Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$		
e^x	0	1	e	$+\infty$

2.4.4 Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

a. Justifier l'existence d'une asymptote.

b. Déterminer une équation de la tangente au point A d'abscisse 0.

c. Déterminer une équation de la tangente au point B d'abscisse 1. Quelle propriété a cette tangente ?

d. Tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle et les tangentes.

2.4.5 Compléments

Limite de $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ en$+\infty$ et limite de $x \longmapsto xe^x$ en$-\infty$

Il y a la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On cherche une fonction qui minore $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

a. Déterminer le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. On utilisera la propriété démontrée au paragraphe 2.4.2 : pour tout réel x, $e^x > x$.

b. Justifier que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 1$.
En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

c. Déterminer la limite de $x \longmapsto \dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$.

d. En posant $y = -x$, déterminer la limite de $x \longmapsto xe^x$ en $-\infty$.

Théorème 2.4.3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty}(xe^x)=0.$$

On généralisera ces deux propriétés aux fonctions puissances, ainsi :

Théorème 2.4.4

$$\textit{Pour tout entier naturel } n \textit{ non nul : } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^n e^x)=0.$$

☛ La fonction exponentielle « l'emporte » sur les fonctions puissances (d'exposant positif) en $+\infty$.

Comportement de la fonction exponentielle au voisinage de 0

Théorème 2.4.5

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

✏ Démontrer le théorème 2.4.5 en utilisant les définitions du nombre dérivé.

Équations et inéquations

Théorème 2.4.6
La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}=]-\infty\,;\,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}_+^*=]0\,;\,+\infty[$.

✏ Démontrer le théorème 2.4.6.

Définition 2.4.1
Étant donné le nombre réel $m>0$*, l'unique solution de l'équation* $e^x=m$ *dans* $\mathbb{R}$ *est le* logarithme népérien *de* m*, noté* $\ln(m)$*. Ainsi, pour tout nombre réel* x *et pour tout nombre réel* $m>0$ *:*

$$e^x=m \;\textit{ équivaut à }\; x=\ln(m).$$

Corollaire 2.4.7
Pour tous nombres réels a *et* b *:*

$$\begin{aligned} e^a=e^b &\;\textit{ équivaut à }\; a=b\\ e^a\leqslant e^b &\;\textit{ équivaut à }\; a\leqslant b.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout nombre réel x *:*

$$\begin{aligned} e^x<1 &\;\textit{ équivaut à }\; x<0\\ e^x=1 &\;\textit{ équivaut à }\; x=0\\ e^x>1 &\;\textit{ équivaut à }\; x>0.\end{aligned}$$

Exercice

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels :

a. $e^{-x+7}=e^{x+3}$.

b. $e^{2x}+2e^x-3=0$.

c. $e^{2x}\leqslant 1$.

3 Fonction composée e^u

3.1 Dérivée de e^u

Théorème 3.1.1 (admis)
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\exp \circ u = e^u$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.

✏ Déterminer les dérivées des fonctions $x \longmapsto f(x) = e^{-x^2}$, $x \longmapsto g(x) = e^{\cos(x)}$ et $x \longmapsto h(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Corollaire 3.1.2
Pour tous nombres réels a et b (avec $a \neq 0$), la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto ae^{ax+b}$.

✏ Justifier le corollaire 3.1.2.

☛ En particulier, la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -e^{-x}$.

Corollaire 3.1.3
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, les fonctions u et e^u ont le même sens de variation sur I.

✏ Justifier le corollaire 3.1.3.

3.2 Primitives de $u'e^u$

Théorème 3.2.1 (corollaire du théorème 3.1.1)
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors les primitives de $u'e^u$ sur I sont les fonctions $e^u + C$, avec C une constante réelle.

✏ Justifier le théorème 3.2.1.

Corollaire 3.2.2
Pour tous nombres réels a et b (avec $a \neq 0$), les primitives de la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$, avec C une constante réelle.

✏ Justifier le corollaire 3.2.2.

✏ Déterminer la primitive F de $x \longmapsto f(x) = e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2e^2$.

3.3 Cas particuliers

a. Étudier les fonctions $x \longmapsto f_k(x) = e^{-kx}$ (k étant un nombre réel strictement positif) : limites, dérivée, variations, représentations graphiques.

b. Étudier les fonctions $x \longmapsto g_k(x) = e^{-kx^2}$ (k étant un nombre réel strictement positif) : parité, limites, dérivée, variations, représentations graphiques.