Calcul intégral

Première partie

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Novembre 2013

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre les intervalles sont non vides.
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'une unité de longueur et l'aire d'une partie X *du plan sera notée* $\text{aire}(X)$.

1 Définition de l'intégrale d'une fonction continue

1.1 Domaine associé à une fonction positive

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction positive f définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$). Le domaine $\mathscr{D}$ associé à la fonction f est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. On a donc :

$$\mathscr{D} = \{M(x\ ;\ y)/a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

☛ $\mathscr{D}$ est le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

✏ Représenter un tel domaine.

L'unité d'aire du plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ est l'aire du rectangle $OIKJ$ avec $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$, on a donc 1 unité d'aire $= \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| = OI \times OJ$.

✏ Représenter le rectangle $OIKJ$.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier positive

Définition 1.2.1
Soit f *une fonction en escalier positive définie sur un intervalle* $[a\ ;\ b]$ *(avec* $a \leqslant b$*). On appelle* intégrale de a à b de la fonction f *l'aire du domaine associé à* f *sur* $[a\ ;\ b]$ *exprimée en unités d'aire.*
Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Vocabulaire

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de $f(x)\,dx$ ».
- Les réels a et b sont les *bornes* de l'intégrale, a est la *borne inférieure* et b est la *borne supérieure*.
- La variable x est une variable *muette*, ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$, etc.

Exemple

Représenter la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 7]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } -1 \leqslant x < 2 \\ 2 \text{ si } 2 \leqslant x < 5 \\ 4 \text{ si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$ et calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^7 f(x)\,dx$.

1.3 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.3.1
Soit f *une fonction continue positive sur un intervalle* $[a\ ;\ b]$ *(avec* $a \leqslant b$*). On appelle* intégrale de a à b de la fonction f *l'aire du domaine associé à* f *sur* $[a\ ;\ b]$ *exprimée en unités d'aire.*
Ce nombre est encore noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

✏ Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$ et calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

✏ Sans calcul, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

1.4 Extension de la notion d'intégrale aux fonctions continues de signe quelconque

1.4.1 Intégrale d'une fonction continue négative

Si f est une fonction continue négative sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ (avec $a \leqslant b$) et si $\mathscr{D}$ est le domaine associé à f sur $[a\,;\,b]$, c'est-à-dire, $\mathscr{D} = \{M(x\,;\,y)\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\,\text{aire}(\mathscr{D})$ (en unités d'aire).

☛ On dit parfois que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est l'*aire algébrique* du domaine $\mathscr{D}$.

✏ Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x$ et calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

1.4.2 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Si f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[a\,;\,b]$ (avec $a \leqslant b$), pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ on additionne les « aires algébriques », c'est-à-dire que, si f est positive pour les domaines $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_5$, négative pour les domaines $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_4$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire}(\mathscr{D}_1) - \text{aire}(\mathscr{D}_2) + \text{aire}(\mathscr{D}_3) - \text{aire}(\mathscr{D}_4) + \text{aire}(\mathscr{D}_5).$$

✏ Représenter la situation décrite ci-dessus.

2 Propriétés algébriques de l'intégrale

2.1 Propriétés concernant l'intervalle d'intégration

Théorème 2.1.1
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I.

1. *Quel que soit* $a \in I$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
2. *Quels que soient* $a \in I$, $b \in I$ *et* $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *(relation de* CHASLES*).*
3. *Quels que soient* $a \in I$ *et* $b \in I$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

☛ Comparer les trois formules du théorème 2.1.1 à $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Le théorème 2.1.1 sera démontré dans un autre chapitre sur l'intégration.

2.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 2.2.1
Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I, *si* $a \in I$ *et* $b \in I$ *alors :*

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Théorème 2.2.2
Si f *est une fonction continue sur un intervalle* I*, si* $k \in \mathbb{R}$ *(*k *est une constante réelle ne dépendant pas de la variable d'intégration), si* $a \in I$ *et* $b \in I$*, alors :*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Corollaire 2.2.3
Si f *et* g *sont deux fonctions continues sur un intervalle* I*, si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *(*α *et* β *sont deux constantes réelles ne dépendant pas de la variable d'intégration), si* $a \in I$ *et* $b \in I$ *alors :*

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

☛ Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 seront démontrés dans un autre chapitre sur l'intégration.

2.3 Intégrales et inégalités

2.3.1 Positivité

Théorème 2.3.1
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $[a\,;\,b]$ *avec* $a < b$*.*

$$\textit{Si } f \geqslant 0 \textit{ sur } [a\,;\,b] \textit{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

✏ Justifier le résultat énoncé dans le théorème 2.3.1.

2.3.2 Intégration d'une inégalité

Théorème 2.3.2
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a\,;\,b]$ *avec* $a < b$*.*

$$\textit{Si } f \leqslant g \textit{ sur } [a\,;\,b] \textit{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

✏ Démontrer le théorème 2.3.2 et interpréter graphiquement le résultat lorsque les fonctions f et g sont positives sur $[a\,;\,b]$.

3 Applications du calcul intégral

3.1 Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition 3.1.1
Si f *est une fonction continue sur un intervalle* $[a\,;\,b]$ *(avec* $a < b$*), la* valeur moyenne *de* f *sur* $[a\,;\,b]$ *est le nombre* $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

✏ Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto f(x) = -x + 3$ sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.

3.2 Calculs d'aires

3.2.1 Rappel

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, soit $a \in I$, soit $b \in I$ tels que $a \leqslant b$. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3.2.2 Cas d'une fonction continue négative

Lorsque la fonction f est négative sur I, l'aire, exprimée en unités d'aire, est :

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

3.2.3 Aire du domaine situé entre deux courbes

Théorème 3.2.1
Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère deux fonctions f *et* g *continues sur un intervalle* I *telles que* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in I$. *Pour tout* $a \in I$ *et tout* $b \in I$ *tels que* $a \leqslant b$*, l'aire du domaine* $\mathscr{D}$ *limité par les courbes représentatives des fonctions* f *et* g *et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$*, exprimée en unités d'aire, est :*

$$\text{aire}(\mathscr{D}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

✏ Démontrer le théorème 3.2.1 (on pourra s'aider d'un dessin).

Exemple

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, représenter la parabole P d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - x - 2$ et la droite Δ d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et Δ.
3. Écrire l'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la parabole P et la droite Δ (exprimée en unités d'aire) sous forme d'une intégrale.
4. Donner une approximation décimale de cette aire au centième près.

4 Complément

On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$. Pour cela on rappelle que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ (unité graphique 10 cm).
2. On partage l'intervalle $[0\,;\,1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$, n étant un entier naturel non nul. On construit les rectangles R_k de hauteur $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ et les rectangles R'_k de hauteur $\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2$ sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k}{n}\,;\,\dfrac{k+1}{n}\right]$. Représenter les rectangles lorsque $n = 10$.

3. En comparant $\int_0^1 x^2\,dx$ avec la sommes des aires des rectangles R_k et la somme des aires des rectangles R'_k, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \int_0^1 x^2\,dx \leqslant v_n$ avec :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right].$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et $v_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
5. En cherchant les limites des suites (u_n) et (v_n), déterminer la valeur de $\int_0^1 x^2\,dx$.