Limites d'une fonction numérique

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Octobre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Limites d'une fonction numérique

1.1 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

1.1.1 Définitions

On considère une fonction numérique f définie sur un intervalle du type $]\alpha\,;\,+\infty[$ où α est un nombre réel.

Définition 1.1.1
Soit ℓ un nombre réel.

On dit que f a pour limite *ℓ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$), si tout intervalle ouvert J contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand (c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif B tel que $f(x) \in J$ pour tout $x > B$).*

Définition 1.1.2
On dit que f a pour limite *$+\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$), si tout intervalle ouvert J du type $]A\,;\,+\infty[$ (avec A un nombre réel strictement positif) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand (c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif B tel que $f(x) \in J$ pour tout $x > B$).*

Théorème 1.1.1 (unicité de la limite)
Lorsqu'une fonction possède une limite en $+\infty$, cette limite est unique.

☛ On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ la limite.

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

☛ Certaines fonctions n'ont pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ comme les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ ou $x \longmapsto \sin(x)$.

1.1.2 Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère (en général orthogonal ou orthonormal).

Définition 1.1.3
Lorsqu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ (ou en $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote *à la courbe représentative de f.*

✏ Représenter graphiquement les différentes situations.

☛ La position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = \ell$ s'obtient en étudiant le signe de $f(x) - \ell$ suivant les valeurs de x.

1.1.3 Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$ de certaines fonctions de référence

Théorème 1.1.2

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, *et*, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
- *Plus généralement, n étant un entier naturel non nul :*
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair ;*
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair.*
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Théorème 1.1.3

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
- *Plus généralement,* n *étant un entier naturel non nul,* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

1.2 Limites infinies en a (a réel)

1.2.1 Définitions

On considère une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert contenant le nombre réel a, sauf en a.

Définition 1.2.1
On dit que f *a pour* limite $+\infty$ *en* a *(ou que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* a*), si tout intervalle ouvert* J *du type* $]A\,;\,+\infty[$ *(avec* A *un nombre réel strictement positif) contient toutes les valeurs* $f(x)$ *pour* x *assez « proche » de* a *(c'est-à-dire qu'il existe un intervalle ouvert* I *contenant* a *tel que pour tout* $x \in I - \{a\}$*,* $f(x) \in J$*).*

☛ On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Limites à droite, limites à gauche

Parfois, dans la recherche d'une limite, on peut avoir une ambigüité sur le signe, on doit alors chercher la limite à droite ou la limite à gauche.

Définition 1.2.2
On considère une fonction numérique f *définie sur* $]\alpha\,;\,a[\cup]a\,;\,\beta[$ *où* α*,* a *et* β *sont des nombres réels tels que* $\alpha < a < \beta$.
La restriction *de* f *à* $]a\,;\,\beta[$ *est la fonction* f_1 *:*

$$\begin{array}{ccc}]a\,;\,\beta[& \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

La restriction *de* f *à* $]\alpha\,;\,a[$ *est la fonction* f_2 *:*

$$\begin{array}{ccc}]\alpha\,;\,a[& \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Définition 1.2.3
On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*)* à droite *en* a *ou que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*)* par valeurs supérieures *si la restriction* f_1 *de* f *pour* $x > a$ *a pour limite* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*) en* a.

On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*)* à gauche *en* a *ou que* $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*)* par valeurs inférieures *si la restriction* f_2 *de* f *pour* $x < a$ *a pour limite* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*) en* a.

☛ On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ la limite à gauche.

1.2.2 Limites en 0 de certaines fonctions de référence

Théorème 1.2.1

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- *Plus généralement,* n *étant un entier naturel non nul :*
  - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ *si* n *est pair ;*
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ *si* n *est impair.*
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

1.2.3 Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère (en général orthogonal ou orthonormal).

Définition 1.2.4
Lorsqu'une fonction f *a pour limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *en* a *(*a *étant un nombre réel), éventuellement à droite ou à gauche, on dit que la droite d'équation* $x = a$ *est* asymptote *à la courbe représentative de la fonction* f*.*

✏ Représenter les différentes situations.

1.3 Limites finies en a (a réel)

On peut également définir les limites finies en a réel d'une fonction f.
Pour les fonctions « habituelles », lorsque f est définie en a, on a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

☛ Par exemple, $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$ (avec $a \neq 0$) et $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ (avec $a \geqslant 0$).
Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ on dit que f est *continue* en a.

2 Opérations sur les limites

a désignant un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, on considère deux fonctions numériques f et g dont on connaît les limites en a (éventuellement à droite ou à gauche), α et β sont deux nombres réels.

2.1 Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	α	α	α	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	β	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$						

2.2 Produit par un nombre réel non nul

k désigne un nombre réel quelconque *non nul*.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	α	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [kf(x)]$			

2.3 Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	α	$\alpha \neq 0$	$\alpha \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	β	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \times g(x)]$							

2.4 Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	α	$\alpha \neq 0$	0	α	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\beta \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$	β	β	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$							

Conclusion

Il y a quatre cas où on ne peut pas conclure : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », ce sont des *formes indéterminées*.

2.5 Applications

2.5.1 Applications aux fonctions polynômes

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$.

1. Déterminer la fonction u définie pour tout nombre réel non nul, et qui vérifie, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = -2x^3 \times u(x)$.
2. Utiliser le résultat précédent pour déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Théorème 2.5.1
La limite, en $+\infty$ ou en $-\infty$, d'une fonction polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré.

✏ Démontrer le théorème 2.5.1 pour une fonction polynôme du troisième degré.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(3x^3 + 5x - 7\right)$ et $\lim_{x \to -\infty} \left(3x^3 + 5x - 7\right)$.

2.5.2 Applications aux fonctions rationnelles

Théorème 2.5.2
La limite, en $+\infty$ ou en $-\infty$, d'une fonction rationnelle (écrite sous la forme d'un quotient de deux fonctions polynômes) est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré (du numérateur et du dénominateur).

✏ Démontrer le théorème 2.5.2.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$, $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-4x^2 + 3}{5x^2 + x + 11}$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5 - x^3}$.

Recherche de la limite d'une fonction rationnelle en un nombre réel

On considère la fonction f définie pour tout $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 3}$.
Déterminer les limites, à droite et à gauche, de f en 3.

2.5.3 Applications aux fonctions irrationnelles

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - 2\sqrt{x} + 7\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}.$$

3 Limite d'une fonction composée

3.1 Notion de composée de deux fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   Définir la fonction g telle que, pour tout réel x, $g(x) = f(2x + 3)$.
   On dit que g est la *composée* de la fonction $x \longmapsto u(x) = 2x + 3$ suivie de la fonction f.
   Pouvez-vous définir la composée de f suivie de u ?
2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
   Déterminer deux fonctions (simples) u et v, telles que f soit la composée de u suivie de v.

Définition 3.1.1
On considère une fonction u définie sur un intervalle I et une fonction v définie sur un intervalle J tel que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction composée *de u suivie de v est la fonction f définie pour tout réel x de I par $f(x) = v(u(x))$.*
On note $f = v \circ u$.

3.2 Théorème

Théorème 3.2.1 (admis)
a, b, c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
On considère les fonctions u définie au voisinage de a (sauf peut-être en a) et v définie au voisinage de b (sauf peut-être en b).
Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim_{y \to b} v(y) = c$ alors $\lim_{x \to a} (v \circ u)(x) = c$.

✏ Justifier que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$.

4 Théorèmes de comparaison

4.1 Théorème des « gendarmes »

Théorème 4.1.1 (admis)
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ est un nombre réel.
On considère trois fonctions f, g et h définies au voisinage de a, sauf en a, telles que, pour tout x :

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

✏ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin(x)}{x+2}$.

4.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 4.2.1 (admis)
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
On considère les fonctions f et g définies au voisinage de a, sauf en a, telles que, pour tout x :

$$g(x) \leqslant f(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

✏ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)}$.

Théorème 4.2.2 (admis)
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
f et h sont deux fonctions définies au voisinage de a, sauf en a, telles que, pour tout x :

$$f(x) \leqslant h(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

✏ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)}$.

4.3 Signe de la limite

Théorème 4.3.1 (signe de la limite)
Soit f la fonction définie sur $I =]\alpha\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant 0$ et soit ℓ un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\ell \geqslant 0$.

☛ On a un théorème analogue lorsqu'il s'agit d'une limite en $-\infty$ ou lorsque $f \leqslant 0$ sur I.

5 Exercices

EXERCICE 1

1. Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^3} \qquad f_2(x) = -x^4 \qquad f_3(x) = -3 + \frac{1}{x}.$$

2. Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f_4(x) = -x^3 \qquad f_5(x) = -\frac{1}{x^4} \qquad f_6(x) = 5 + \frac{1}{x}.$$

3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x + 1 - \frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2 - 9 + \frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2+\dfrac{2}{x}}.$$

4. Étudier le comportement de g_1, g_2, g_3 lorsque x tend vers a avec :

$$g_1(x) = \frac{1}{x-3} \text{ et } a = 3 \qquad g_2(x) = \frac{-2}{x+2} \text{ et } a = -2 \qquad g_3(x) = \frac{1}{x^2} \text{ et } a = 0.$$

EXERCICE 2

Déterminer les limites de $x \longmapsto f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ en 1 et en -2.

EXERCICE 3

Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.

1. Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0\,;\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe.
3. Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe.

EXERCICE 4

Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2 - 3x + 5\right) \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3 + 4x - 1\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+x+3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3+2}{3x^2+5} \qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{-4x^3+2}{3x^2+5}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2}{x}.$$