La fonction logarithme népérien

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Avril 2014

Table des matières

Le symbole ═ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Définition et propriétés algébriques

1.1 Définition

La fonction exponentielle, $exp : x \longmapsto e^x$, est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'image de $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ par la fonction exponentielle est $\mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$, donc la fonction exponentielle est une bijection de $]-\infty\,;\,+\infty[$ sur $]0\,;\,+\infty[$, ainsi tout nombre réel strictement positif possède un unique antécédent par la fonction exponentielle.

Définition 1.1.1
Pour tout nombre réel $x > 0$, le logarithme népérien[1] *de x, noté $\ln(x)$, est l'unique nombre réel y tel que $x = e^y$.*
Ainsi, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout nombre réel y :

$$\boxed{y = \ln(x) \ \textit{ équivaut à } \ x = e^y}.$$

- ➾ Déterminer les valeurs de $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln\dfrac{1}{e}$.
- ☛ La fonction logarithme népérien est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$, c'est la bijection réciproque de la fonction exponentielle :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[\\ x & \xmapsto{\ln} & y = \ln(x) \\ x = e^y & \xleftarrow{\exp} & y \end{array}$$

Théorème 1.1.1
- *Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.*
- *Pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.*

☛ Le théorème 1.1.1 est une conséquence directe de la définition.

1.2 Propriétés algébriques

Théorème 1.2.1 (propriété fondamentale)
Le logarithme népérien du produit de deux nombres réels strictement positifs est égal à la somme de leurs logarithmes népériens.
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, $\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}$.

➾ Pour démontrer le théorème 1.2.1, on pose $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$. Exprimer a et b en fonction de α et β et calculer ab.

Corollaire 1.2.2 (du théorème 1.2.1)
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif n :

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln(a) \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a).$$

- ➾ Démontrer ce corollaire.
- ➾ Exprimer en fonction de $\ln(3)$ les nombres $\ln(27)$, $\ln(2187)$, $\ln\dfrac{1}{9}$, $\ln(63) - \ln(7)$, $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$ et $2\ln(6) - \ln(4)$.

1. John NEPER ou NAPIER, mathématicien écossais, 1550 – 1617. Il a mis au point le premier une table de logarithmes en 1614.

2 Représentation graphique et limites

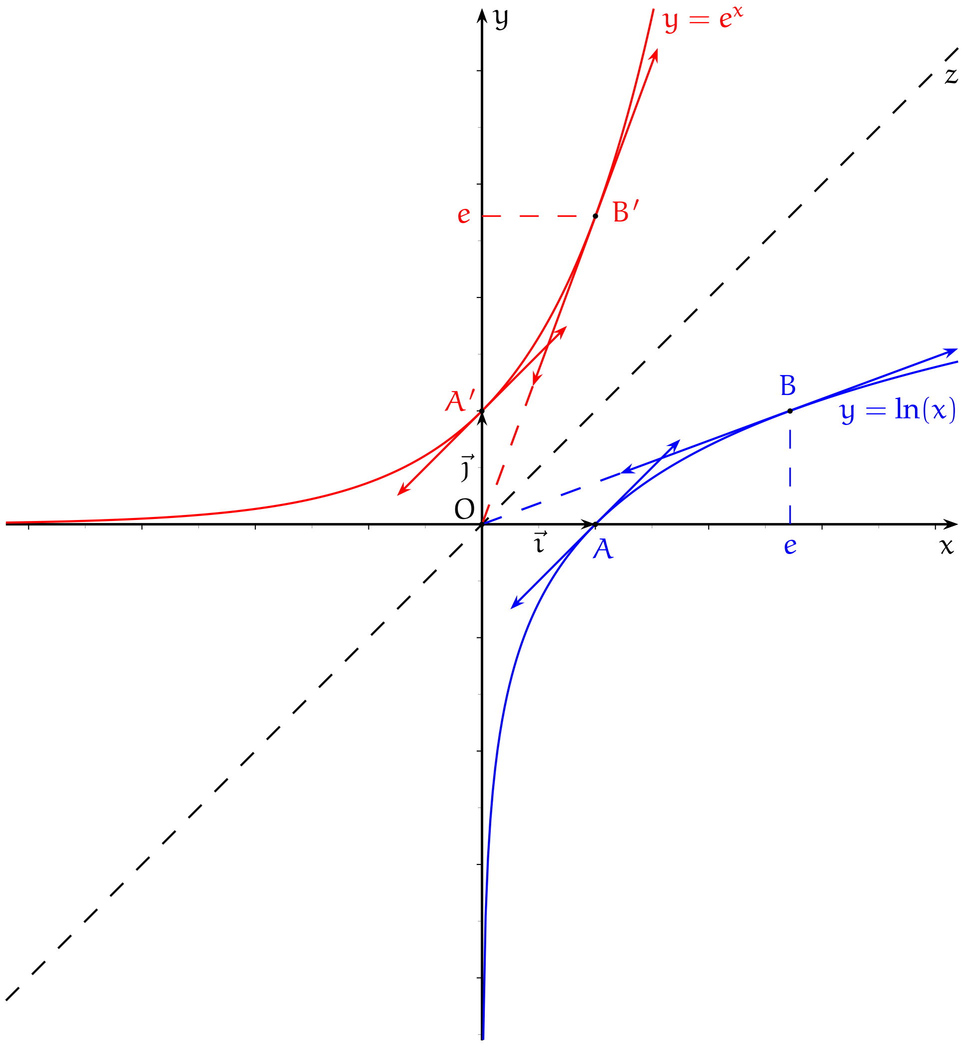
2.1 Représentation graphique

Le plan est muni du repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Lorsque $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow I$ sont deux fonctions numériques bijectives et réciproques l'une de l'autre, les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ de f et $\mathscr{C}_g$ de g sont symétriques par rapport à la droite (Oz) d'équation $y = x$.

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien se déduit donc de celle de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe (Oz). Les symétries axiales sont des isométries, elles conservent le contact et la nature des branches infinies.

La représentation graphique de la fonction logarithme népérien possède donc une asymptote, l'axe des ordonnées, une branche parabolique dont la direction asymptotique est celle de l'axe des abscisses, la tangente au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1 et celle au point d'abscisse e passe par O.



⇒ Déterminer une équation cartésienne des tangentes en A et B.

2.2 Limites

En utilisant les propriétés (branches infinies) de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}.$$

➠ En posant $X = \ln(x)$ c'est-à-dire $x = e^X$, démontrer que :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \left(x \ln(x)\right) = 0}.$$

3 Sens de variation et signe

3.1 Dérivée de la fonction logarithme népérien

Comme la représentation graphique de la fonction logarithme népérien a une tangente en A d'abscisse 1 de coefficient directeur égal à 1, on en déduit que la fonction logarithme népérien est dérivable en 1 et sa dérivée en 1 est égale à 1, c'est-à-dire $\ln'(1) = 1$. En utilisant la définition de la dérivée, on obtient :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}.$$

Théorème 3.1.1
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ *et la dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. *Ainsi, pour tout* $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\boxed{\ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

➠ Pour tout $a > 0$, on pose $T(h) = \dfrac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h}$ pour $h \neq 0$ tel que $a + h > 0$.
Démontrer que $T(h) = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln(1+k)}{k}$ avec $k = \dfrac{h}{a}$. En déduire le théorème 3.1.1.

☛ La fonction logarithme népérien est donc continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Corollaire 3.1.2
Les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0\,;\,+\infty[$ *sont les fonctions* $x \longmapsto \ln(x) + C$, C *étant une constante réelle.*

➠ Déterminer les dérivées des fonctions f et g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $x \overset{f}{\longmapsto} x\ln(x)$ et $x \overset{g}{\longmapsto} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Déterminer les primitives sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{3x^3 + 2x^2 + x + 1}{x}$.

3.2 Sens de variation

Théorème 3.2.1
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

☛ Le théorème 3.2.1 est une conséquence directe de la définition : une fonction numérique bijective définie sur un intervalle I et à valeurs dans l'intervalle J et sa fonction réciproque ont le même sens de variation sur, respectivement, I et J.

On peut également justifier le théorème 3.2.1 en utilisant la dérivée : pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.

➠ Dresser le tableau de variation de la fonction logarithme népérien.

3.3 Signe et conséquences pour les équations et les inéquations

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$ par la fonction logarithme népérien est $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ donc :

Théorème 3.3.1
La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^* =]0\,;\,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$*. Ainsi, pour tous nombres réels* $x > 0$, $a > 0$ *et* $b > 0$ *:*

$\ln(x) > 0$ *si, et seulement si,* $x > 1$ — $\ln(a) > \ln(b)$ *si, et seulement si,* $a > b$

$\ln(x) = 0$ *si, et seulement si,* $x = 1$ — $\ln(a) = \ln(b)$ *si, et seulement si,* $a = b$

$\ln(x) < 0$ *si, et seulement si,* $0 < x < 1$.

➠ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \qquad \ln\left(x^2+5x+6\right) = \ln(x+11) \qquad \left(\ln(x)\right)^2 + 5\ln(x) - 6 = 0$$

$$\ln(5-x) - \ln(3) + \ln(x-1) \geqslant 0 \qquad \ln\left(3x^2 - x\right) \leqslant \ln(x) + \ln(2).$$

4 Compléments

4.1 Dérivée de $\ln \circ u$

Théorème 4.1.1 (admis)
Si u *est une fonction dérivable strictement positive sur un intervalle* I*, la fonction* $\ln \circ u$ *est dérivable sur* I *et* $\boxed{(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

☛ La fonction $\ln \circ u$ se note aussi $\ln(u)$ ou encore $\ln u$.

➠ Déterminer les dérivées de $x \xmapsto{f} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ sur $\mathbb{R}$ et de $x \xmapsto{g} \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $]-1\,;\,1[$.

Corollaire 4.1.2
Si u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, les primitives sur* I *de* $\dfrac{u'}{u}$ *sont soit* $\ln(u) + C$ *si* $u > 0$ *sur* I*, soit* $\ln(-u) + C$ *si* $u < 0$ *sur* I*, avec* C *une constante réelle.*

➠ Justifier le corollaire 4.1.2.

➠ Déterminer une primitive de $x \xmapsto{f} \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;\,0[$ et de $x \xmapsto{g} \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

➠ a étant un nombre réel non nul, déterminer une primitive de $x \xmapsto{h} \dfrac{1}{ax+b}$ sur tout intervalle où $ax + b \neq 0$.

4.2 La fonction logarithme décimal

Définition 4.2.1
On appelle fonction logarithme décimal*, la fonction, notée* $\log$ *(ou* $\log_{10}$*), définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par :*

$$\boxed{\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}.$$

Théorème 4.2.1
Pour tous nombres réels $a > 0$ *et* $b > 0$ *et pour tout entier relatif* n *:*

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\frac{1}{a} = -\log(a) \qquad \log\frac{a}{b} = \log(a) - \log(b) \qquad \log\left(a^n\right) = n\log(a).$$

- Démontrer le théorème 4.2.1.
- Déterminer la dérivée, le sens de variation, les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction logarithme décimal. Construire le tableau de variation et tracer la représentation graphique.

Théorème 4.2.2
Pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout entier relatif n :

$$\log\left(10^{n}\right) = n \quad \textit{et} \quad 10^{n} \leqslant x < 10^{n+1} \textit{ si et seulement si } n \leqslant \log(x) < n+1.$$

- Démontrer le théorème 4.2.2.
- Déterminer le nombre de chiffres (dans le système décimal) de 2^{2014}.