Primitives d'une fonction numérique

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Janvier 2013

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Notion de primitives

1.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.1.1
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
On appelle (fonction) primitive *de* f *sur* I *toute fonction* F *dérivable sur* I *telle que* $\boxed{F' = f}$.

✏ Déterminer des primitives (définies sur $\mathbb{R}$) des fonctions $x \longmapsto f_1(x) = x^2$, $x \longmapsto f_2(x) = \sin(x)$ et $x \longmapsto f_3(x) = \cos(x)$.

1.2 Propriétés des primitives

On démontrera partiellement dans le chapitre sur le calcul intégral le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 (théorème d'existence)
Toute fonction continue sur un intervalle I *possède des primitives définies sur* I.

Dans les exemples précédents, on a vu que les fonctions avaient plusieurs primitives, plus précisement :

Théorème 1.2.2
Si une fonction f *possède une primitive* F *sur un intervalle* I*, alors* f *possède une infinité de primitives sur* I.
De plus, l'ensemble des primitives de f *sur* I *est l'ensemble des fonctions* $F + C$ *où* C *est une fonction constante sur* I.

✏ Démontrer le théorème 1.2.2.

Déterminer l'ensemble des primitives, sur $\mathbb{R}$, de $x \longmapsto f_2(x) = \sin(x)$.

Déterminer l'ensemble des primitives, sur $]0\,;\,+\infty[$, de $x \longmapsto f_4(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

☛ Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle I diffèrent d'une constante. Si F et $F + C$ (avec C constante) sont ces deux primitives, la représentation graphique de $F + C$ se déduit de celle de F par la translation de vecteur $C\vec{\jmath}$, le plan étant muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Théorème 1.2.3
Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *qui possède des primitives sur* I. *Il existe une seule primitive* F *de* f *sur* I *qui prend la valeur* $y_0 \in \mathbb{R}$ *en* $x_0 \in I$*, c'est-à-dire telle que* $F(x_0) = y_0$.

✏ Démontrer le théorème 1.2.3.

Déterminer la primitive de $x \longmapsto f_2(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 puis celle qui prend la valeur y_0 en $x_0 \in \mathbb{R}$.

2 Recherche des primitives d'une fonction

2.1 Linéarité

Théorème 2.1.1

1. *Si* f *et* g *sont deux fonctions qui possèdent des primitives* F *et* G *sur un intervalle* I *alors* $F + G$ *est une primitive de* $f + g$ *sur* I.
2. *Si* f *est une fonction qui possède une primitive* F *sur un intervalle* I *et si* k *est une constante réelle alors* kF *est une primitive de* kf *sur* I.

✏ Déterminer la primitive de $x \longmapsto g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1.

2.2 Tableau des primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de la fonction f définie sur l'un des intervalles indiqués dans la première colonne et C est une constante (réelle).

f est définie sur	$f(x) =$	$F(x) =$
	0	
	a (a constante réelle)	
	x	
	x^2	
	x^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$	
	$\frac{1}{x^2}$	
	x^n avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -2$	
	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
	$\cos(x)$	
	$\sin(x)$	
	$\cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$	
	$\sin(ax+b)$ avec $a \neq 0$	
	e^x	
	e^{ax+b} avec $a \neq 0$	
	$\frac{1}{x}$	
	$\frac{1}{ax+b}$ avec $a \neq 0$	

2.3 Formules d'intégration

Pour le tableau suivant, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I et C est une (fonction) constante sur I.

Fonction f	Primitives de f sur I	Condition éventuelle sur u
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 1$		
$\dfrac{u'}{u^2}$		
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -2$		
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		
$u'e^u$		
$\dfrac{u'}{u}$		

Exemples
Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions f, g, h et k sur l'intervalle I correspondant.

$$f(x) = x^2(x^3-1)^5 \qquad I = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad I =]1\,;\,+\infty[$$

$$h(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2} \qquad I =]2\,;\,+\infty[$$

$$k(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^4} \qquad I = \mathbb{R}.$$