Fonctions sinus et cosinus

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Décembre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Fonctions sinus et cosinus

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath})$.
Le cercle trigonométrique $\mathcal{U}$ *est le cercle de centre* O *et de rayon* 1.
À tout nombre réel x *on associe le point* M *du cercle trignométrique* $\mathcal{U}$ *tel que* $\left(\vec{\imath}\,;\ \overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi$ *(*k *étant un entier relatif).*

- *Le* cosinus *du nombre réel* x*, noté* $\cos(x)$*, est l'abscisse de* M.
- *Le* sinus *du nombre réel* x*, noté* $\sin(x)$*, est l'ordonnée de* M.

✏ Faire une figure.

Définition 1.1.2

- *La fonction* cosinus *est la fonction qui, à tout nombre réel* x*, associe* $\cos(x)$.
- *La fonction* sinus *est la fonction qui, à tout nombre réel* x*, associe* $\sin(x)$.
- *La fonction* tangente *est la fonction qui, à tout nombre réel* x *tel que* $\cos(x) \neq 0$*, associe* $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

✏ Donner les valeurs remarquables des fonctions sinus, cosinus et tangente.

1.2 Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Théorème 1.2.1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

☛ Le théorème 1.2.1 a été démontré en devoir à la maison.

Corollaire 1.2.2
La fonction sinus est dérivable en 0 *et le nombre dérivé de la fonction sinus en* 0 *est égal à* 1.

Théorème 1.2.3 (admis)
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Lemme
Pour tous nombres réels p *et* q, $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

✏ Démontrer le lemme en calculant $\sin(a+b) - \sin(a-b)$ puis en posant $p = a+b$ et $q = a-b$.

Théorème 1.2.4
La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et sa fonction dérivée est la fonction cosinus.*

Preuve du théorème 1.2.4

On pose $T(h) = \dfrac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$ avec a et h deux nombres réels et $h \neq 0$.

a. Vérifier que $T(h) = \cos\left(a + \dfrac{h}{2}\right) \times \dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}$.

b. Déterminer la limite de $T(h)$ quand h tend vers 0 et conclure.

Corollaire 1.2.5
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et sa fonction dérivée est l'opposé de la fonction sinus.*

✏ Démontrer le corollaire 1.2.5 en utilisant les formules des angles complémentaires.
Déterminer la fonction dérivée de la fonction tangente.

Corollaire 1.2.6
a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$.
Les fonctions $x \longmapsto f(x) = \cos(ax+b)$ et $x \longmapsto g(x) = \sin(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées f' et g' sont définies pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = -a\sin(ax+b) \quad \textit{et} \quad g'(x) = a\cos(ax+b).$$

✏ Démontrer le corollaire 1.2.6.

2 Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

2.1 Parité et périodicité

Propriété 2.1.1
La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.
Ainsi, pour tout nombre réel x :

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

☛ On en déduit que la représentation graphique de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (le repère étant orthogonal) et celle de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété 2.1.2
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Ainsi, pour tout nombre réel x :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

☛ On en déduit que les représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par les translations de vecteurs $2k\pi\vec{\imath}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, le plan étant muni du repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

2.2 Variations des fonctions cosinus et sinus

✏ Déterminer les variations des fonctions cosinus et sinus sur $[0\,;\,\pi]$.

2.3 Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

✏ Représenter graphiquement les fonctions cosinus et sinus.
☛ Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont des *sinusoïdes*.

3 Applications

Exercice 1

Résoudre graphiquement, dans $]-\pi\,;\,\pi]$, l'inéquation $2sin(x) > 1$ puis l'inéquation $\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

Sujet D page 98 ou exercice n° 143 page 99.