Exercice 1

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\ ;\ 60]$ par :

$$C(x) = \frac{\text{e}^{0,1x} + 20}{x}.$$

1) On désigne par C' la dérivée de la fonction C.

Montrer que, pour tout $x \in [5\ ;\ 60],\ C'(x) = \dfrac{0,1x\text{e}^{0,1x} - \text{e}^{0,1x} - 20}{x^2}$.

2) On considère la fonction f définie sur [5 ; 60] par

$$f(x) = 0,1x\text{e}^{0,1x} - \text{e}^{0,1x} - 20.$$

- **a)** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur [5 ; 60].
- **b)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5\ ;\ 60]$.
- **c)** Donner un encadrement à l'unité de α.
- **d)** En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5\ ;\ 60]$.

3) En déduire le tableau de variations de C sur $[5\ ;\ 60]$.

4) En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

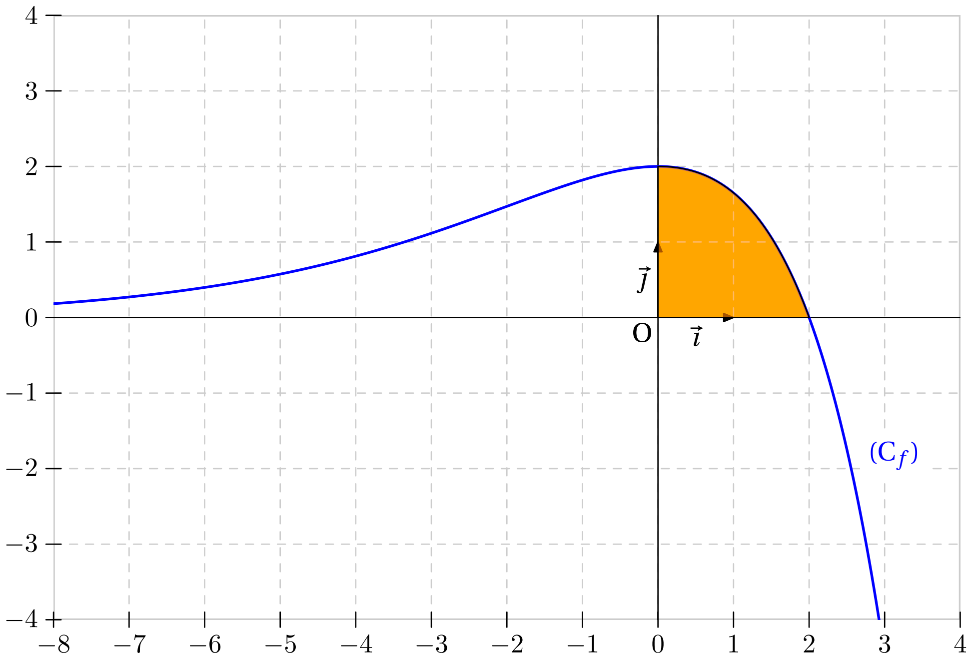
- **a)** $C(x) = 2$.
- **b)** $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5\ ;\ 60]$.
Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.
Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points $A(0\ ;\ 2)$ et $D(2\ ;\ 0)$ appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

2) Calculer $f'(x)$.

3) En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

4) Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x + 2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1) À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.

2) **a)** On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x + 8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) On considère Gune autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

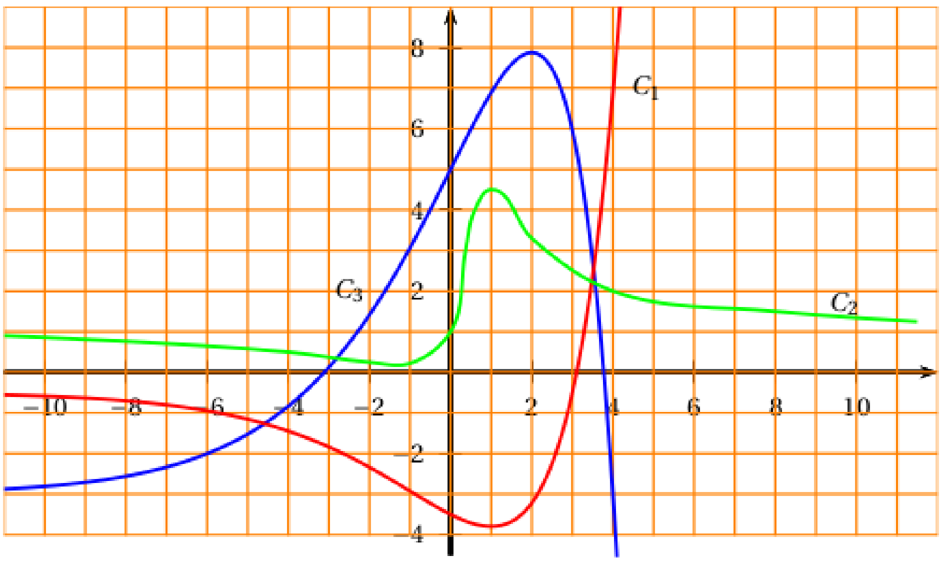


Figure 2

Exercice 3

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Reporter sur le sujet le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1) L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

a. $\ln 2$ **b.** $-2\ln 2$
c. $2\ln 2$ **d.** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :

a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

3) L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

a. $y = 2x$ **b.** $y = x - 1$
c. $y = x$ **d.** $y = 2x - 1$

4) La fonction f est :

a. concave sur $[0\ ;\ 1]$ **b.** concave sur $[0\ ;\ +\infty[$
c. convexe sur $[0; +\infty[$ **d.** convexe sur $[0; 1]$

5) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à :

a. $\mathrm{e} - 5$ **b.** 5
c. $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ **d.** 1

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1) Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2\ ;\ 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

2) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$.

b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 8]$.

3) On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2\ ;\ 8]$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\ ;\ 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

a) Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8\ ;\ 8]$.

b) Montrer que le point de (C) d'abscisse $4,8$ est un point d'inflexion.

4) On considère la fonction F définie sur $[2\ ;\ 8]$ par :

$$F(x) = -x + 10\ln x + \frac{16}{x}$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur $[2\ ;\ 8]$.

b) Calculer $I = \displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 5

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 20]. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1) Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.

2) Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

3) Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de $I = \displaystyle\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (5x - 5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1) Montrer que $f'(x) = (-x + 6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0 ; 20].

2) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 20].

b) Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 20]. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur [0 ; 6]. Donner la valeur arrondie au millième de α.

4) **a)** Montrer que la fonction F définie sur [0 ; 20] par $F(x) = (-25x - 100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur [0 ; 20].

b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 8]. Donner sa valeur exacte.

Partie C

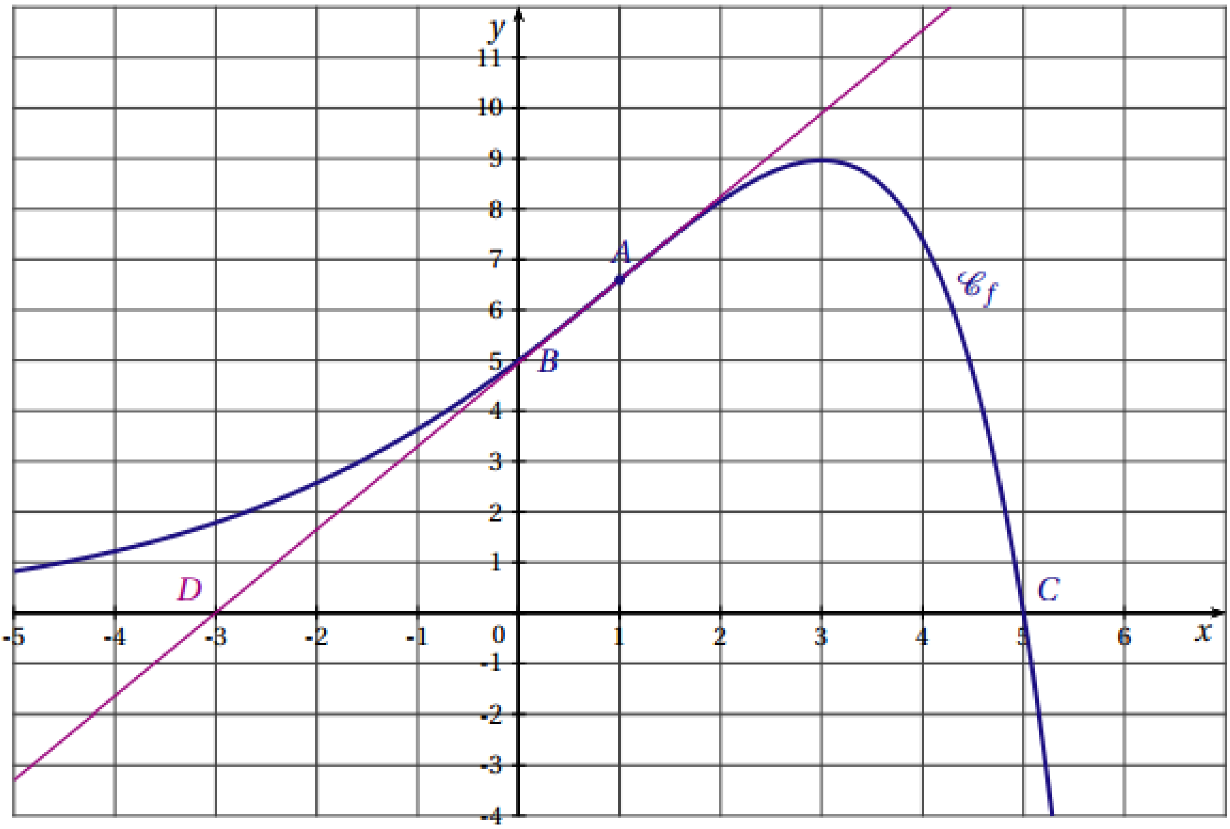
Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à [0 ; 20]. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur [6 ; 20] dont la valeur arrondie au millième est $13,903$.

1) Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).

2) L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.
Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Exercice 6

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A\left(1\ ;\ 4e^{0,5}\right)$, $B(0\ ;\ 5)$ et $C(5\ ;\ 0)$.
Le point $D(-3\ ;\ 0)$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Par lecture graphique

1) Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2) Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3) a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aires.
   b) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi : $0 \leqslant I \leqslant 9$ $\quad 10 \leqslant I \leqslant 12$ $\quad 20 \leqslant I \leqslant 24$

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)e^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5 - 0,5x)e^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1) a) Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = 0,25(-x+1)e^{0,5x}$.
   b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.
2) Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)e^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Exercice 7

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies paf semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle [0 ; 3,6]).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1) Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.

2) Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)\mathrm{e}^x.$$

1) **a)** On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I = [0 ; 3,6], on a : $B'(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x$.

b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2) **a)** Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle [0 ; 3] l'autre dans l'intervalle [3 ; 3,6].
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de chacune des deux solutions.

Annexe 2


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6

Exercice 8

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos, ...).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = -0{,}003\,2x^3 + 0,06x^2 + 5.$$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$ par le nombre $f(n)$.

1) Calculer $f(5)$.

2) Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.
(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul :
$p = \dfrac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1 % près.)

3) En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013 ? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).

4) On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2015.
On calcule pour cela $M = \dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

b) Calculer M.

Exercice 9

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce. L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A :

Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par

$$f(t) = 25\mathrm{e}^{-0,5t},$$

où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

1) Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.

2) **a)** Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4] par

$$F(t) = -50\mathrm{e}^{-0,5t}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4].

b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^4 25\mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

Partie B :

Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.
L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle [4 ; 10] par :

$$g(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t^2} + t - 4,65.$$

1) On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
Montrer que pour réel t de l'intervalle [4 ; 10], $g'(t) = -4t\mathrm{e}^{-0,1t^2} + 1$.

2) On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle [4 ; 10].
Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle [4 ; 10].
Donner la valeur arrondie au dixième de α.

3) **a)** En déduire le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle [4 ; 10].

b) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle [4 ; 10].

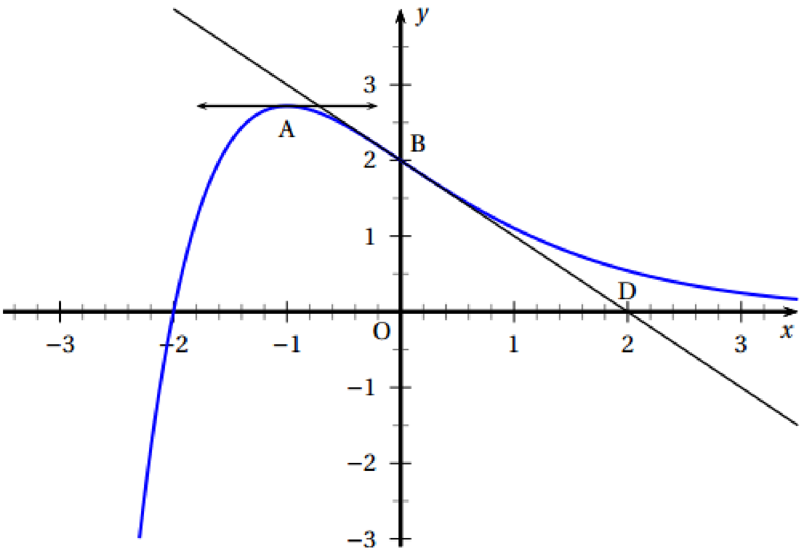
c) Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insectes ?

Exercice 10

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.
La courbe C passe par les points $A(-1\ ;\ e)$ et $B(0\ ;\ 2)$ où $e = \exp(1)$.
La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD), où D a pour coordonnées $(2\ ;\ 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte $0,5$ point ; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.

2) La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

3) $f'(-1) = 0$.

4) $f'(0) = -1$.

5) $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

6) Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2\ln x - 1 \leqslant 0$ est l'intervalle $[e\ ;\ +\infty[$.

2) On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.
La fonction g est convexe sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 11

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0\ ;\ 10]$ par

$$B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5,$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.

1) **a)** Déterminer $B'(x)$, où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.

b) Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x = \ln(4)$.

c) Calculer les valeurs exactes de $B(0); B(10)$ et $B(\ln(4))$.

d) Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur $[0\ ;\ 10]$.

2) **a)** Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4)\ ;\ 10]$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

3) À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

Exercice 12

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 30]$ par

$$f(x) = 5 + x\text{e}^{0,2x-1}.$$

On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10\ ;\ 30]$, $f'(x) = (0,2x+1)\text{e}^{0,2x-1}$.

2) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 30]$.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; 20] et donner un encadrement de α à $0,1$ près.

4) Soit F la fonction définie sur $[-10\ ;\ 30]$ par

$$F(x) = 5(x-5)\text{e}^{0,2x-1} + 5x.$$

On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10\ ;\ 30]$.

- **a)** Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\text{d}x$.
- **b)** En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [5 ; 10]. (On donnera une valeur arrondie au centième.)

PARTIE B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.
Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

1) Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.

2) En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.

3) Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 euros.
Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 10] par

$$f(x) = x^2 - 14x + 15 + 20\ln x.$$

1) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 10] on a :
$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 14x + 20}{x}$.

2) Construire en le justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 10].

3) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ dans l'intervalle [1 ; 10].

Exercice 14

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

3) Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

4) L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

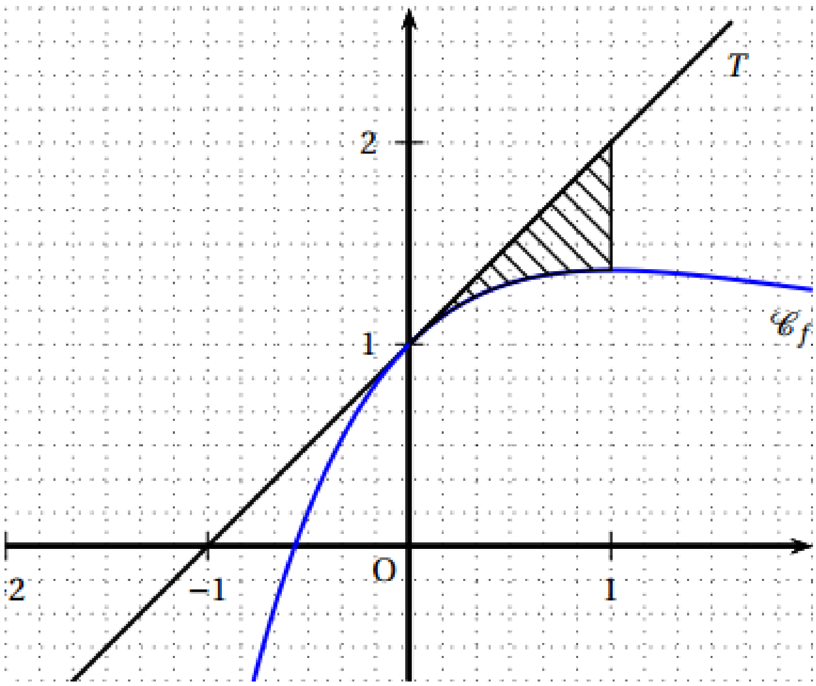
	Instruction	**Réponse**
1	$f(x) = x * \exp(-x) + 1$	$x\mathrm{e}^{-x} + 1$
2	$f''(x) =$ dérivée seconde$[f(x)]$	$\mathrm{e}^{-x}(x - 2)$
3	résoudre $[\mathrm{e}^{-x}(x - 2) \geqslant 0]$	$x \geqslant 2$

a) Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.

c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.

5) On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



a) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1 - x) + x.$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 5] par

$$f(x) = (3 - x)\text{e}^x + 1,$$

soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2\ ;\ 5]$,
$f'(x) = (2 - x)\text{e}^x$ et $f''(x) = (1 - x)\text{e}^x$.

2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
Montrer que : $3 < \alpha < 4$.

4) **a)** Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
Montrer que T a pour équation $y = -\text{e}^3x + 3\text{e}^3 + 1$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.

d) En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\text{e}^3}$.

On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\text{e}^3} < 3,05$.

5) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m) > 0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b

a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b - a$	$b - a > r$	m	$f(m)$	$f(m) > 0$	a	b
Initialisation						3	$3,05$
Étape 1	$0,05$	oui	$3,025$	$0,485$	oui	$3,025$	$3,05$
Étape 2							
Étape 3							

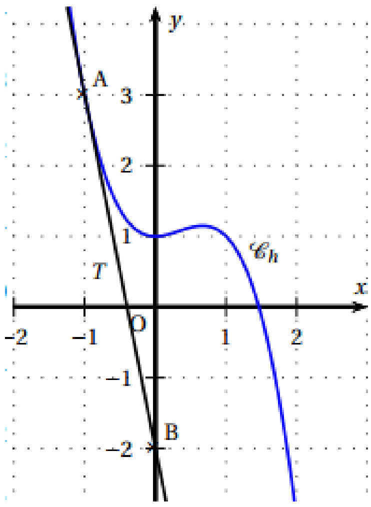
b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Exercice 16

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

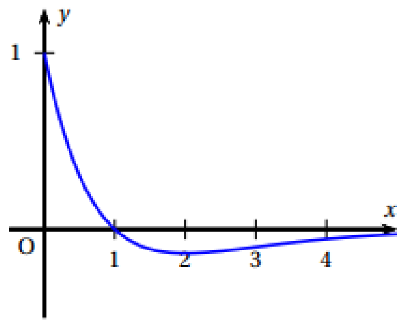
1)

La courbe $\mathcal{C}_h$ représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre.
On a tracé la tangente T à $\mathcal{C}_h$ au point $A(-1\ ;\ 3)$.
T passe par le point $B(0\ ;\ -2)$.
Proposition : le nombre dérivé $h'(-1)$ est égal à -2.



2)

On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
La courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, est donnée ci-contre.
Le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.
Proposition : la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.



3) **Proposition** : on a l'égalité

$$\mathrm{e}^{5\ln 2} \times \mathrm{e}^{7\ln 4} = 2^{19}.$$

4) La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ est donnée en fig. 1.
La courbe représentative d'une de ses primitives, G, est donnée sur la fig. 2. La courbe représentative de G passe par les points $A(0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 5)$.

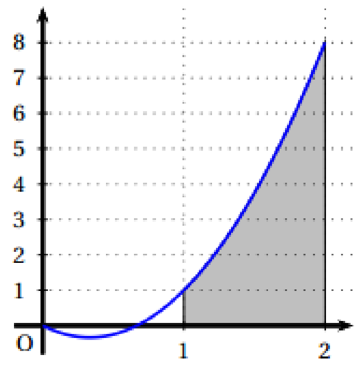


fig. 1

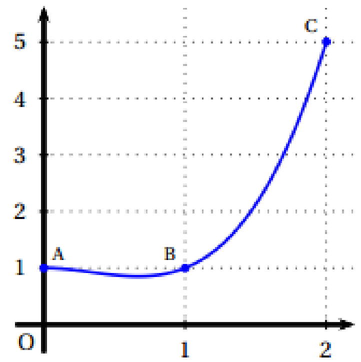


fig. 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en fig. 1 est 4 unités d'aires.

Exercice 17

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des ≪ sorbets bio ≫. Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle I =]0 ; 3] par

$$f(x) = 10x^2 - 20x \ln x.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.
La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I.

Partie A

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

1) Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

- **a)** Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
- **b)** Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
- **c)** Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

2) On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x \ln x \, \mathrm{d}x = 90 \ln 3 - 40$.

- **a)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x) \, \mathrm{d}x$.
- **b)** En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle [1 ; 3], on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1) On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle [1 ; 3], on a : $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.

2) On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle [1 ; 3].

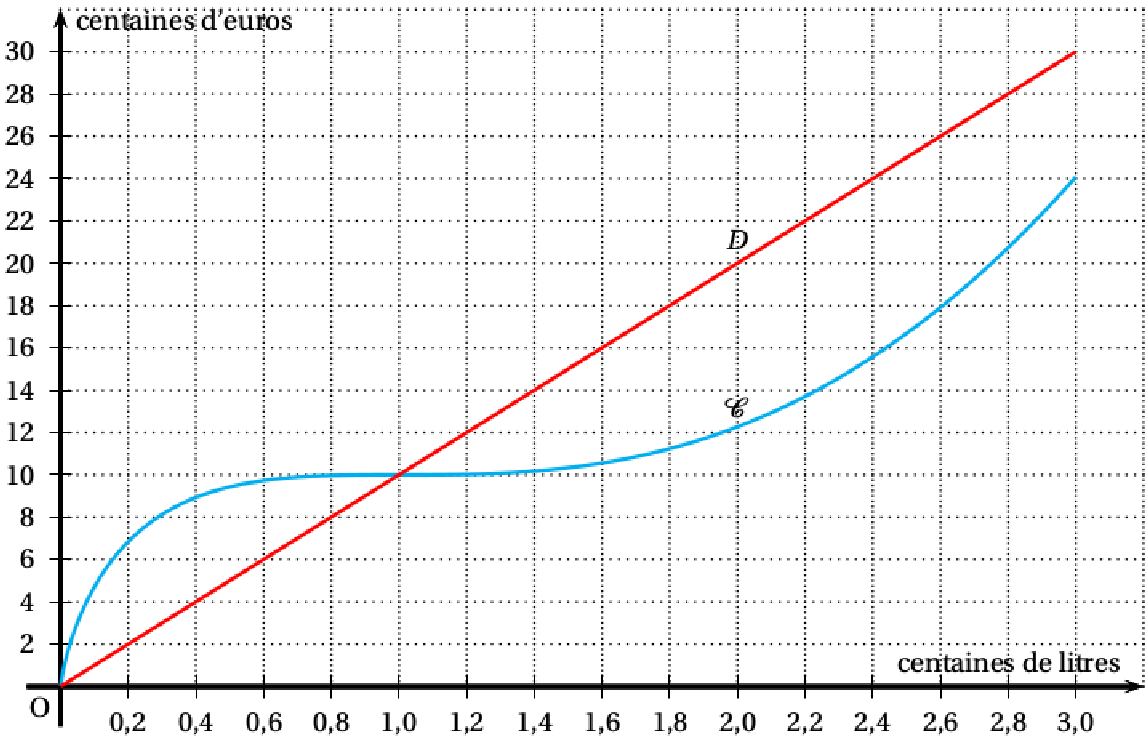
x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	$B'(3)$

- **a)** Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 3], Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.
- **b)** En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 3] puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.

3) L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

ANNEXE

Annexe



Exercice 18

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

On a représenté en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

— la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ;

— la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1) **a)** Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

2) On note α l' abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ.

a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à $0,5$ près.

b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Partie B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à raide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1) **a)** Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

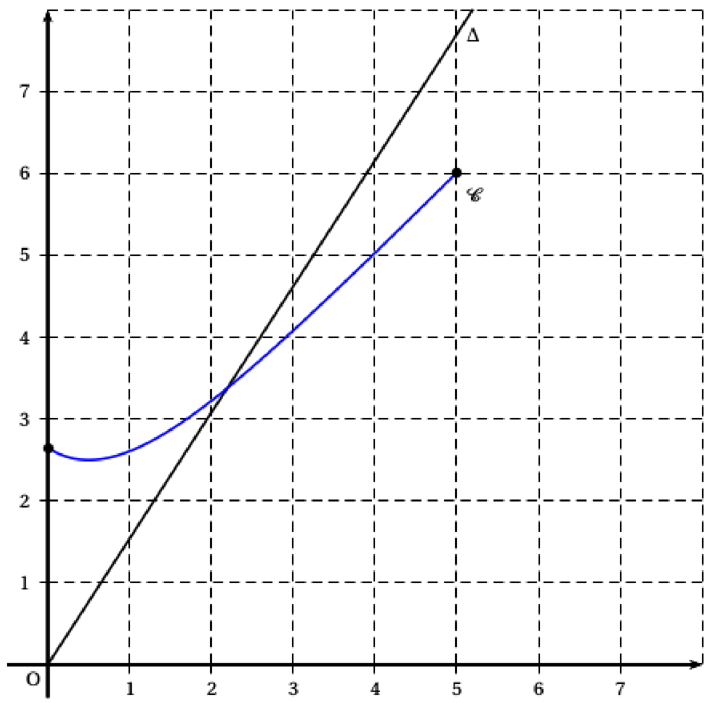
b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue l,50 €.
La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.

2) **a)** Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 5].

b) Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.

3) On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

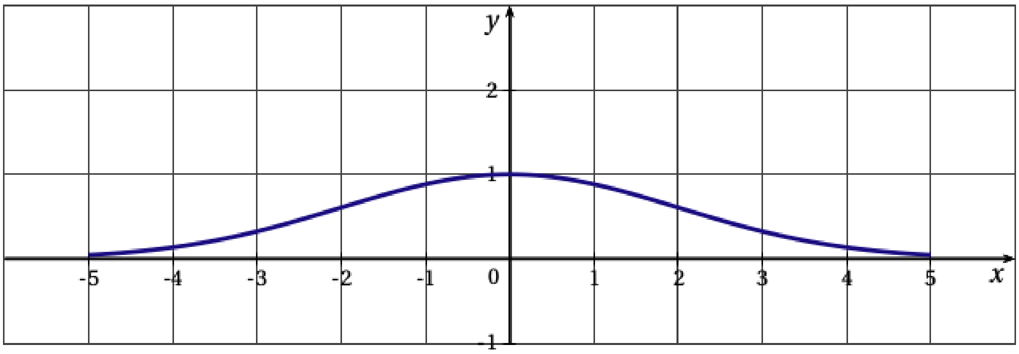
ANNEXE



Exercice 19

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.



1) Sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$:

a. f est une fonction de densité de probabilité **b.** f est positive

c. f n'est pas continue **d.** l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions

2) Sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$:

a. $f'(1) = 0$ **b.** $f'(0) = 1$ **c.** $f'(0) = 0$ **d.** $f'(1) = 1$

3) On admet qu'une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 est $y = -\dfrac{x}{e^2} + \dfrac{5}{e^2}$.
Le nombre dérivé de f en 4 est :

a. $f'(4) = \dfrac{5}{e^2}$ **b.** $f'(4) = \dfrac{1}{e^2}$ **c.** $f'(4) = -\dfrac{1}{e^2}$ **d.** $f'(4) = e^{-2}$

4) On pose $A = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$. Un encadrement de A est :

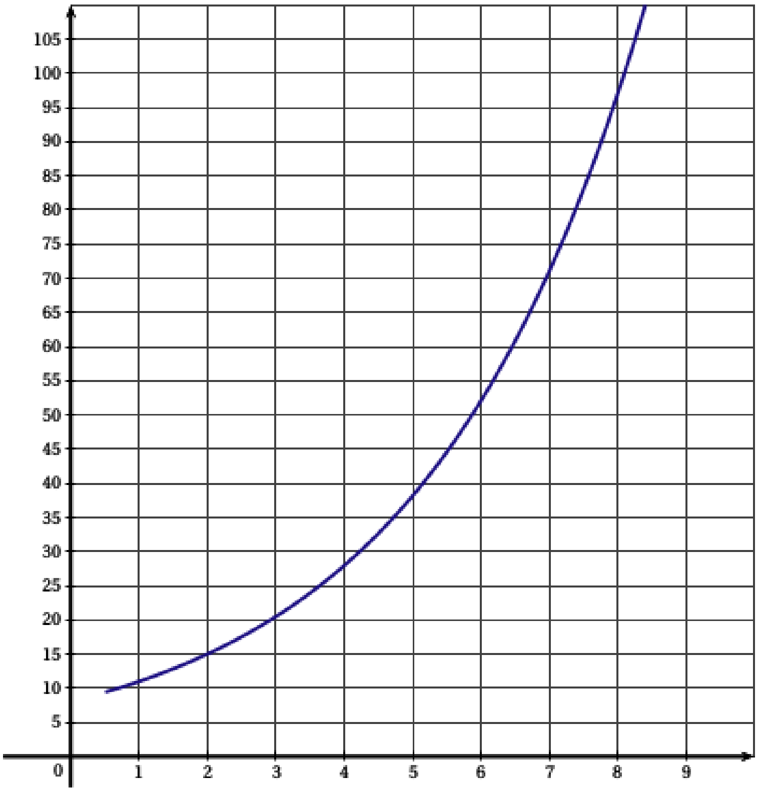
a. $0 < A < 1$ **b.** $1 < A < 2$ **c.** $3 < A < 4$ **d.** $4 < A < 5$

Exercice 20

Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.
On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément. Deux fonctions sont proposées pour modéliser cette situation.

Partie A : Modèle exponentiel

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f qui modélise la situation précédente.
On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément et $f(x)$ la durée de chargement exprimée en seconde.



1) Par lecture graphique, estimer la durée de chargement, en seconde, pour 8 000 personnes connectées.

2) **a)** Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par f.

b) Donner une interprétation de ce résultat.

Partie B : Modèle logarithmique

On considère une autre fonction g pour modéliser la situation précédente.
On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément. La durée de chargement exprimée en seconde est alors $g(x)$ avec $g(x) = 10x - 8\ln(x)$ pour x appartenant à $[0,5\ ;\ +\infty[$.

1) Calculer $g'(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $[0,5\ ;\ +\infty[$.

3) Justifier que la fonction G définie sur $[0,5\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$ est une primitive de g sur $[0,5\ ;\ +\infty[$.

4) On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x$

a) Montrer que la valeur exacte de I peut s'écrire sous la forme $a + b\ln(2)$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de I puis donner une interprétation de ce résultat.

Partie C

Une vidéo particulièrement demandée a attiré simultanément 8 000 personnes. On a constaté que le temps de chargement était de 92 secondes.
Déterminer, en justifiant, celui des deux modèles qui décrit le mieux la situation pour cette vidéo.

Exercice 21

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1) **a)** Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$

a) Justifier que l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

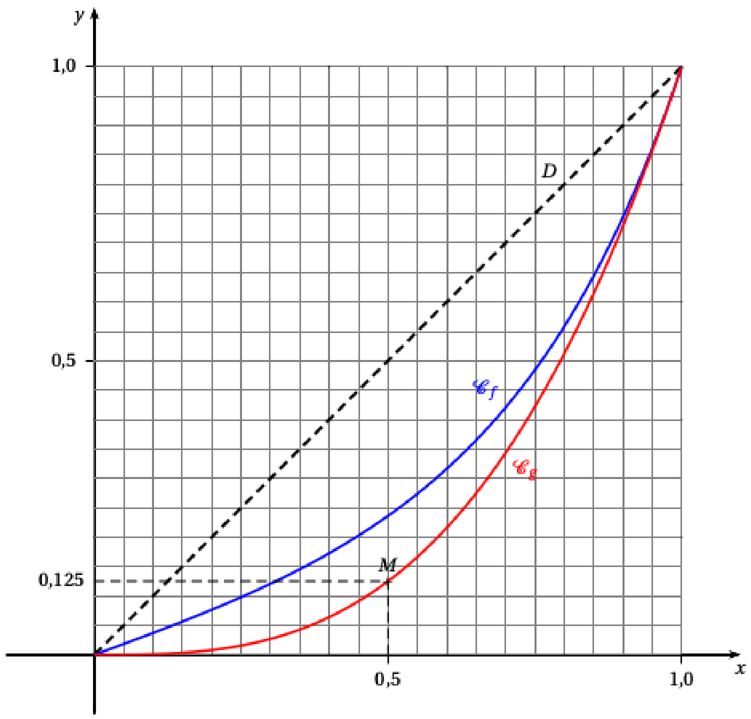
c) En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

4) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$ et soit $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.
On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

- la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite D d'équation $y = x$.



Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :
Le point $M(0,5\ ;\ 0,125)$ est un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_g$. Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante : si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50 % aux revenus les plus faibles) représente 12,5 % de la masse salariale.

1) Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.

2) On note $\mathcal{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathcal{A}_f$.

   a) Montrer que $I_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   b) On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

Exercice 22

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.
On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.
La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1) Quel est le coût total de production pour 450 objets ?

2) Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ? On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

- **a)** Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.
- **b)** Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ » ?

Partie B

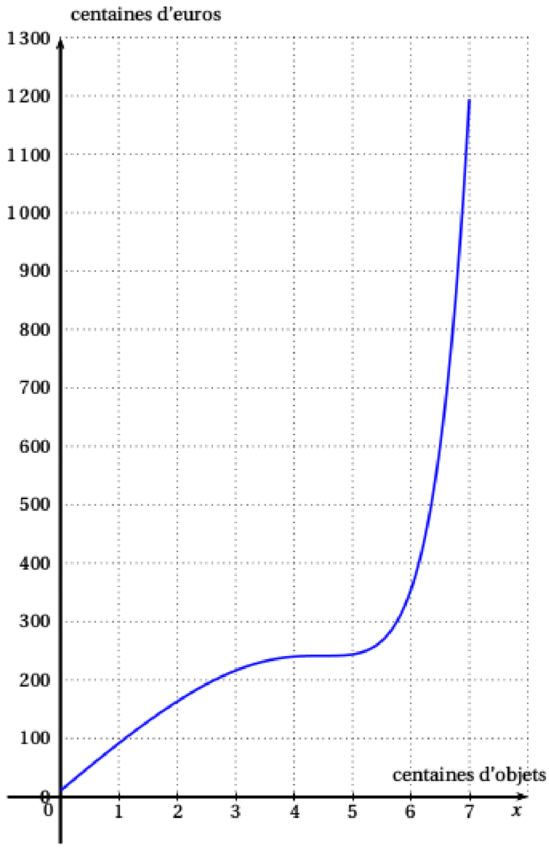
Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1) On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.

2) En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

- **a)** En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
- **b)** Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

ANNEXE


centaines d'euros
1 300
1 200
1 100
1 000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
7
x
centaines d'objets

Exercice 23

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

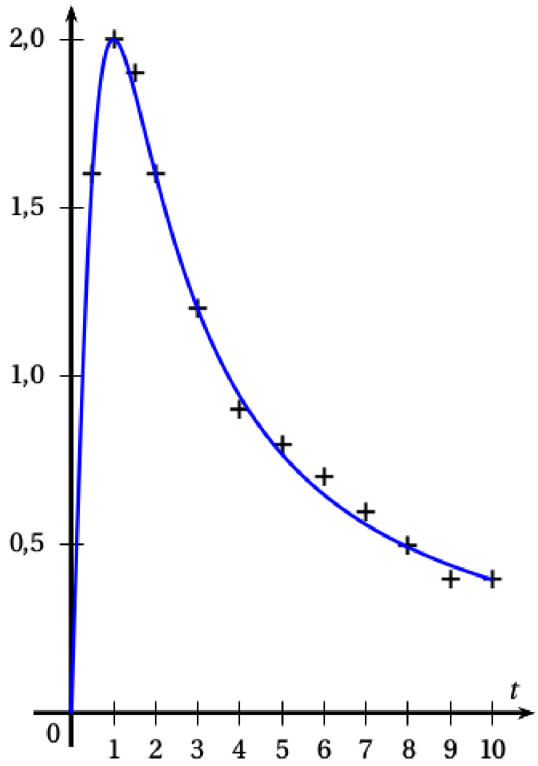
Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.

1) Par lecture graphique donner sans justification :

- **a)** les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ 10]$;
- **b)** la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
- **c)** l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

2) **a)** La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et sa dérivée est g'.
Montrer que :
$$g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

- **b)** En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.



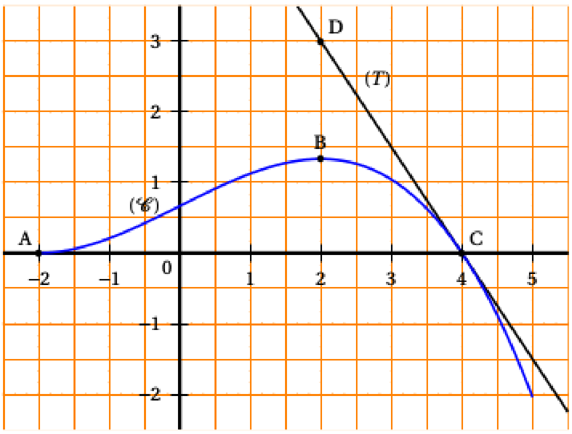
3) On admet que G définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $G(t) = 2\ln\left(t^2+1\right)$ est une primitive de g sur cet intervalle.
Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est donnée par $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

4) On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l.
Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

Exercice 24

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, croissante sur $[-2\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ 5]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $(\mathcal{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé ; elle passe par les points A$(-2\ ;\ 0)$; B$\left(2\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ et C$(4\ ;\ 0)$.
Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point D(2 ; 3).



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\dfrac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2\ ;\ 2]$.

Proposition 3 : $2 \leqslant \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2\ ;\ 5]$.

Exercice 25

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur [1 ; 26] par :

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle [1 ; 26], $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.

2) Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
$f'(t)$		↗		↘	

a) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\ ;\ 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\ ;\ 26]$ et les variations de f sur $[1\ ;\ 26]$.

3) Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4\ ;\ 26]$, f' est décroissante. »

b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par :

$$G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$$

est une primitive sur $[1\ ;\ 26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t\ln(t)$.

1) Déterminer, sur $[1\ ;\ 26]$, une primitive F de la fonction f.

2) On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\frac{1}{26-1}\left[F(26) - F(1)\right]$ est 202. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

Exercice 26

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1 500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur [0 ; 15] par

$$g(x) = 18x + \mathrm{e}^{0,5x-1}.$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

1) Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

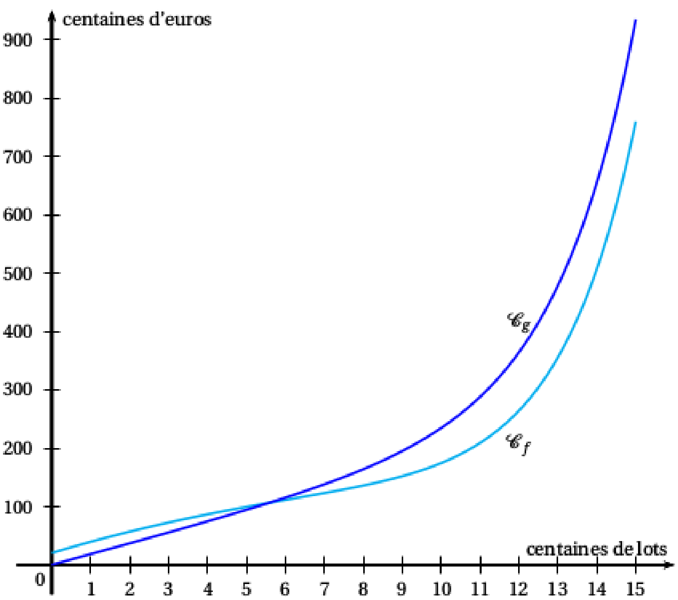
2) Justifier que g est strictement croissante sur [0 ; 15].

Partie B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 15] par

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20,$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et f.



1) Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

2) On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.

- **a)** Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leqslant 0$.
- **b)** Résoudre cette inéquation sur l'intervalle [0 ; 15].
- **c)** En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.

3) On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f'.
Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction h sur $[a\ ;\ b]$ est donnée par $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 27

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1) la concentration à l'instant initial ;

2) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à $0,4$ gramme par litre.
On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ 15]$.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.

3) Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

4) Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x+2)*\texttt{exp}(-0.5*x))$
	$\texttt{exp}(-0.5x) - 0.5*\texttt{exp}(-0.5x)*(x+2)$
2	deriver $(\texttt{exp}(-0.5*x) - 0.5*\texttt{exp}(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\texttt{exp}(-0.5*x) + 0.25*\texttt{exp}(-0.5*x)*(x+2)$
3	factoriser $(-\texttt{exp}(-0.5*x) + 0.25*\texttt{exp}(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\texttt{exp}(-0.5*x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

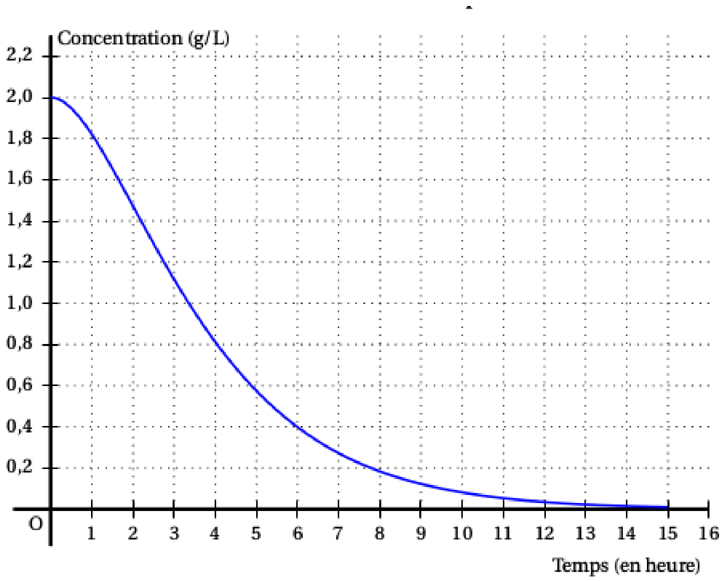
C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à $0,1$ gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

2) Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexe 2 à rendre avec la copie



Exercice 28

Les trois parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.
Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

Partie A

Avant de se lancer, le producteur fait réaliser un sondage auprès de 2500 foyers de la commune ; 80 foyers se déclarent intéressés par l'achat d'un panier par mois.

1) Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion de foyers de la commune susceptibles de passer commande d'un panier mensuel.

2) Quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude $0,02$?

3) La commune compte 15 000 foyers. La condition pour démarrer l'entreprise est de réaliser une recette minimale de 3 500 euros par mois. Sachant que les paniers seront vendus 20 euros l'un, le producteur peut-il envisager de se lancer ? Justifier la réponse.

Partie B

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10], le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1) Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.

2) On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.

- **a)** Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0 \,;\, a]$ inclus dans [0 ; 10] sur lequel la fonction C est convexe.
- **b)** Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Partie C

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes C_R et C_C sur le graphique donné en annexe.
Par lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

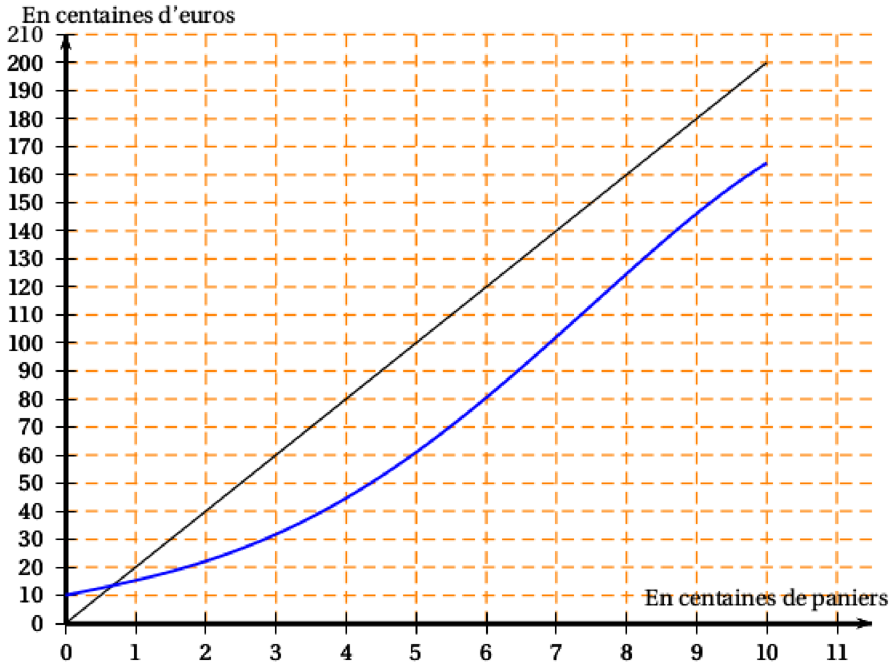
1) Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.

2) Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois.
Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.

3) Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.

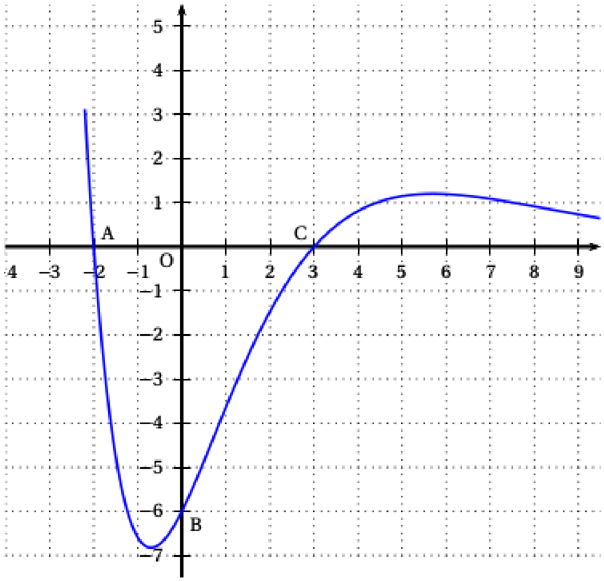
ANNEXE

Partie C



Exercice 29

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : A$(-2\ ;\ 0)$; B$(0\ ;\ -6)$ et C$(3\ ;\ 0)$.



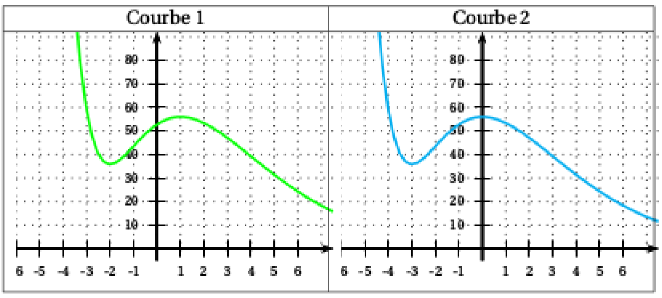
Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1) La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?

2) Sur $[-2\ ;\ 3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

3) Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



Exercice 30

On considère la fonction f définie sur [0,5 ; 10] par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.

2) Étudier le signe de la fonction f' sur [0,5 ; 10], en déduire le tableau de variations de f sur [0,5 ; 10].

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0,5 ; 10].
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut.

4) On considère la fonction F définie et dérivable sur [0,5 ; 10] telle que :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x).$$

Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 10].

5) Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.

6) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 3] : en donner une valeur approchée au millième.

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par

$$f(x) = (3x - 4)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

1) On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 4],
$f'(x) = (7 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.

2) Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 4] puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 4].

b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

4) On considère la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4] par

$$F(x) = (1 - 3x)\mathrm{e}^{-x} + 2x.$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur [0 ; 4].

b) Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 4]

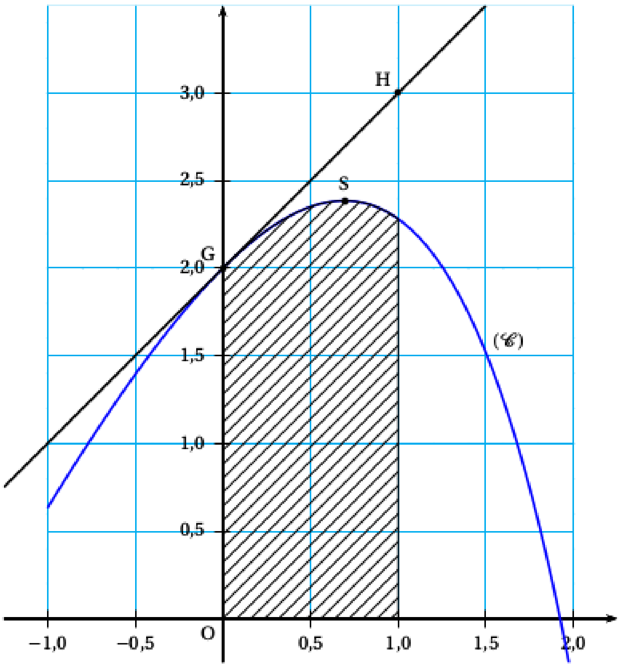
5) On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $f''(x) = (3x - 10)\mathrm{e}^{-x}$.

a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

b) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 32

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées (0 ; 2).
Le point H a pour coordonnées (1 ; 3).
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point G.
La courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$.
Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1) Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Résoudre sur $[-1\,;\,2]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.

3) Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-1\,;\,2]$ par

$$f(x) = ax + b - \mathrm{e}^x$$

où a et b sont deux réels.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Justifier que $a = 2$ et $b = 3$.

3) Déterminer, sur $[-1\,;\,2]$, une primitive F de la fonction f.

4) En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur le graphique.

Exercice 33

On a utilisé un logiciel de calcul formel et on a obtenu les résultats suivants :

1	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
2	dériver $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $-\frac{2}{x^3}$
3	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ $\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$

On pourra utiliser les résultats obtenus par ce logiciel pour répondre à certaines questions de l'exercice.
On considère la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est deux fois dérivable sur $[1 ; 10]$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1) **a)** Déterminer $f'(x)$ sur $[1 ; 10]$.

b) Construire le tableau de variation de la fonction f sur $[1 ; 10]$.

2) **a)** Justifier que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ sur $[1 ; 10]$.

b) Étudier le signe de f'' sur $[1 ; 10]$.

c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3) On considère l'algorithme suivant :

INITIALISATION
X PREND LA VALEUR 2
Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2)}{2}$
Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2{,}1)}{2{,}1}$
TRAITEMENT
TANT QUE $(Y < Z)$ FAIRE
X PREND LA VALEUR $X + 0,1$
Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X)}{X}$
Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X+0{,}1)}{X+0{,}1}$
FIN TANT QUE
SORTIE
AFFICHER X

a) Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	...		

b) Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?

Exercice 34

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1,5 ; 6] par :

$$f(x) = (25x - 32)\mathrm{e}^{-x}.$$

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle [1,5 ; 6], sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x) = (57 - 25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x) = (25x - 82)\mathrm{e}^{-x}$

1) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1,5 ; 6].

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1,5 ; 6] (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).

2) Montrer que, sur l'intervalle [1,5 ; 6], la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3) Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.

a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [4 ; 5].

b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [4 ; 5].

```
Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que b − a > 0,1 faire
        y prend la valeur f((a+b)/2)
        Si y > 1 alors
                a prend la valeur (a+b)/2
        Sinon b prend la valeur (a+b)/2
Fin de Tant que
Sortie
Afficher (a+b)/2
```

Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.

c) Donner une valeur approchée de α au dixième.

Annexe (à rendre avec la copie)

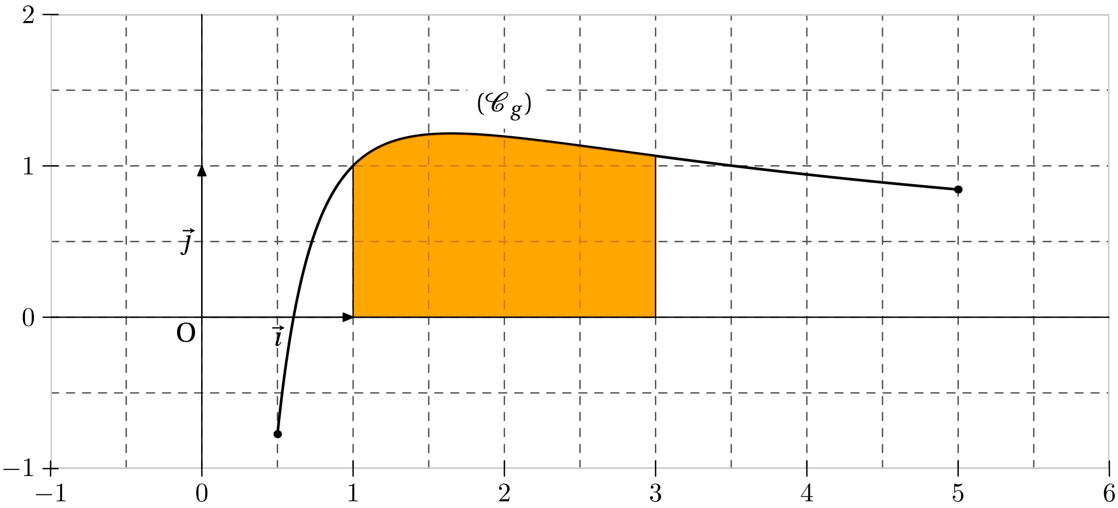
	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »						
3e boucle « Tant que »						
4e boucle « Tant que »						

Exercice 35

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle [0,5 ; 5], et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est tangente en B à la courbe Γ.



1) Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

2) **a)** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0,5 ; 5], on a $g'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle [0,5 ; 5].

c) En déduire les variations de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

4) **a)** On note $\mathcal{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

b) On définit la fonction G sur l'intervalle [0,5 ; 5] par

$$G(x) = \ln(x)[\ln(x) + 1].$$

Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle [0,5 ; 5].

c) Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en unités d'aire.

Exercice 36

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2(x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

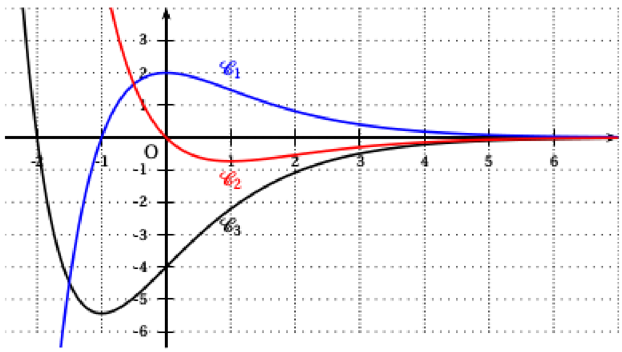
1) Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

2) Justifier que $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f.

3) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.
Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

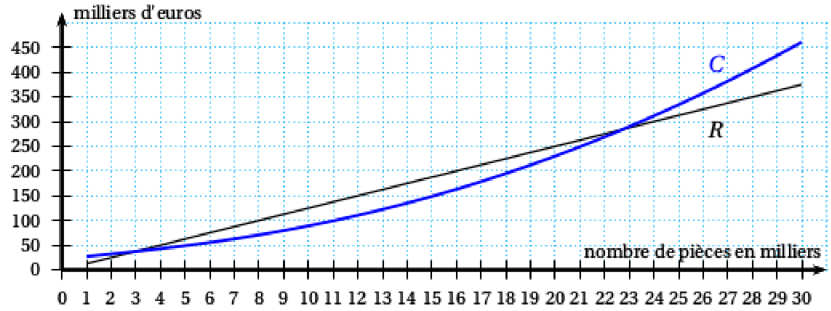


Exercice 37

Une entreprise produit et vend des composants électroniques.
Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1) Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
2) Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3) Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;\,30]$ par

$$B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x.$$

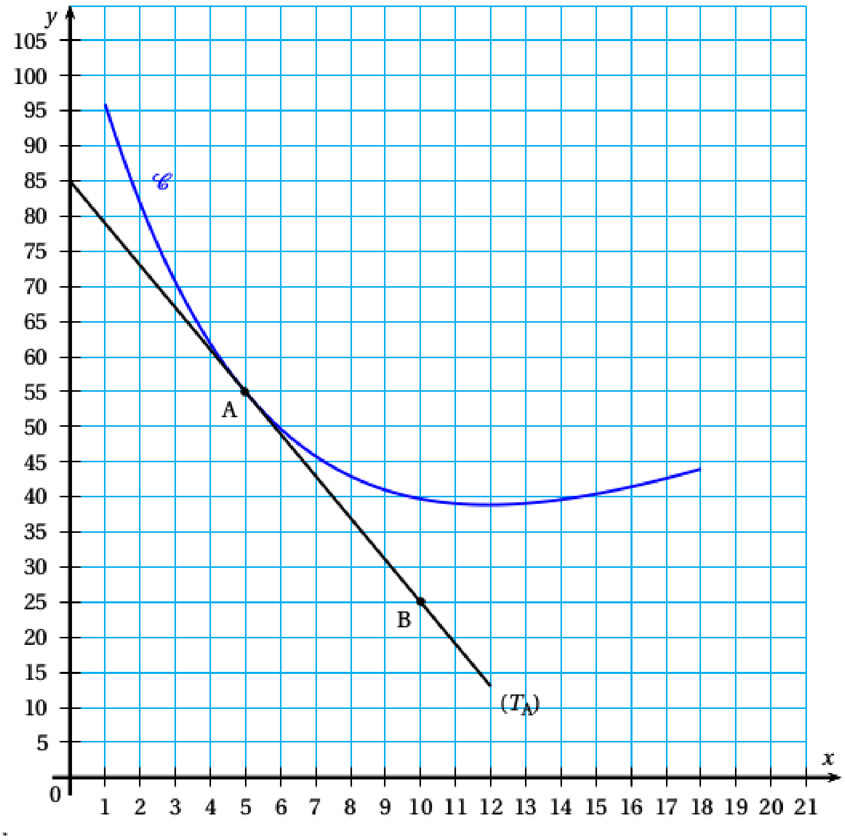
1) Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
2) On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   Justifier le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.

x	1	2	30
$B'(x)$		$6+2\ln 2$	
	7		$-22+2\ln 30$

3) **a)** Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,30]$.
   b) Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.
4) En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5) Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
   Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Exercice 38

Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1 et 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 18].
On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point A(5 ; 55). Le point B(10 ; 25) appartient à la tangente (T_A).



On admet que

$$f(x) = 2x + 5 + 40\mathrm{e}^{-0,2x+1} \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à l'intervalle } [1 ; 18]$$

1) **a)** Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.

b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 10].

c) Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question **1. a.**

2) **a)** Montrer que $2 - 8\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0$ est équivalente à $x \geqslant 5 + 5\ln 4$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur [1 ; 18]. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.

3) Déterminer, par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.

4) **a)** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200\mathrm{e}^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 18].

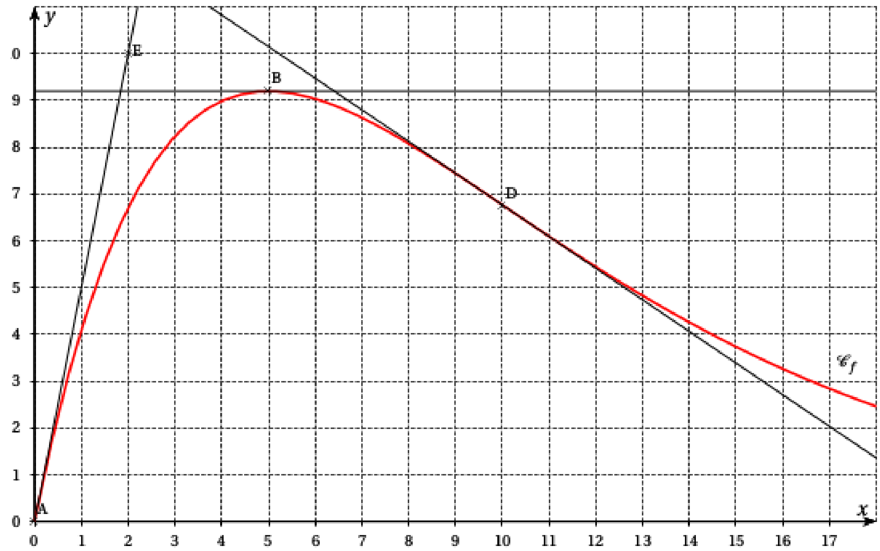
b) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\frac{1}{10}I$.

Exercice 39

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$ ainsi que les tangentes au point A d'abscisse 0, au point B d'abscisse 5 et au point D d'abscisse 10.
On sait aussi que la tangente au point A passe par le point E de coordonnées $(2\ ;\ 10)$ et que la tangente au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1) Donner les valeurs de $f'(5)$ et de $f'(0)$.

2) On admet que D est un point d'inflexion. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie B

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers. Les ventes espérées ont été modélisées par la fonction f dont la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ a été tracée ci-dessus.
En abscisses, x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.
En ordonnées, $f(x)$ représente le nombre de milliers de jouets vendus le x-ième jour.

Ainsi, par exemple, le 10-ième jour après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise prévoit de vendre environ 6 800 jouets.
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$ par $f(x) = 5x\ e^{-0,2x}$.

1) Montrer que $f'(x) = (5 - x)\ e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 18]$.

2) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 18]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 18]$.

3) Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

Partie C

1) On admet que la fonction F définie sur $[0\ ;\ 18]$ par $F(x) = (-25x - 125)\ e^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f.

a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx$.

b) En déduire une estimation du nombre moyen de jouets vendus par jour durant la période des 10 premiers jours. On arrondira le résultat à l'unité.

2) Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants :

1	dériver$[(5-x)*\exp(-0.2*x)]$
	$-\exp(-0.2*x)-\frac{1}{5}*\exp(-0.2*x)*(-x+5)$
2	Factoriser$[-\exp(-0.2*x)-\frac{1}{5}*\exp(-0.2*x)*(-x+5)]$
	$\frac{x-10}{5}*\exp(-0.2*x)$

Utiliser ces résultats pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 40

Les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie sur [1 ; 11] par

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x.$$

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 11]. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 11].

b) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle [1 ; 11].

4) **a)** On considère la fonction F définie sur [1 ; 11] par

$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x.$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.

c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 11]. (On donnera la valeur arrondie au centième.)

Partie B

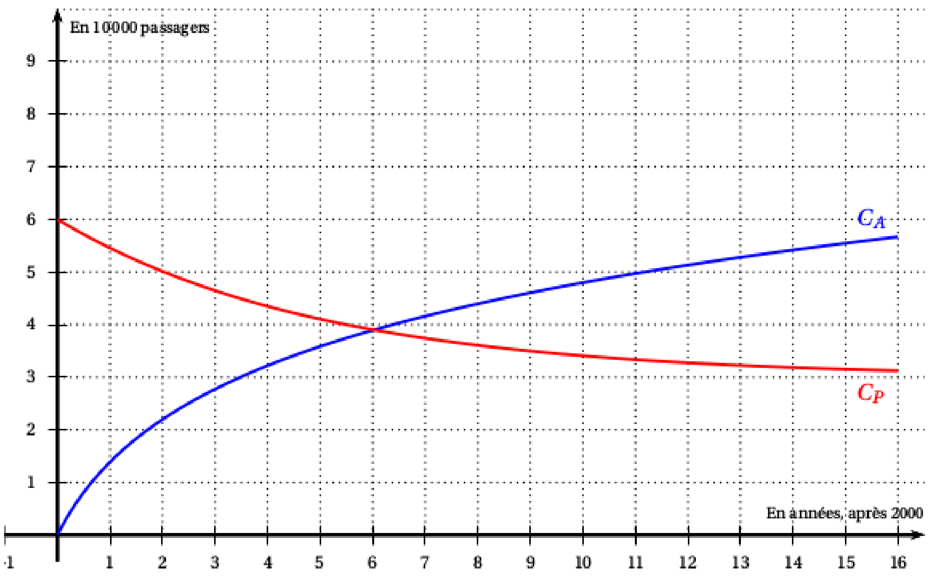
Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1 100 chaises. Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.
On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1) Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?

2) Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

Exercice 41

Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule Avantage qui s'ajoute à la formule Privilège déjà existante.
Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016.
Le nombre de passagers choisissant la formule Privilège est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle [0 ; 16] et le nombre de passagers choisissant la formule Avantage est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle [0 ; 16]. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives C_P et C_A de ces deux fonctions.
Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule Privilège et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule Avantage.



Partie A

Dans cette partie, les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1) Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule Privilège.
2) Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule Avantage et ceux ayant choisi la formule Privilège.
3) Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée ?
4) Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule Privilège durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

Partie B

On admet que la fonction A est définie sur l'intervalle [0 ; 16] par

$$A(x) = 2\ln(x+1)$$

et que la fonction P est définie sur l'intervalle [0 ; 16] par

$$P(x) = 3 + 3\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

On s'intéresse à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule Avantage et ceux ayant choisi la formule Privilège. Pour cela, on considère la fonction E définie sur l'intervalle [0 ; 16] par $E(x) = A(x) - P(x)$.

1) On note E' la fonction dérivée de E sur l'intervalle [0 ; 16].
   a) On admet que $E'(x) = \dfrac{2}{x+1} + 0,6\mathrm{e}^{-0,2x}$. Justifier que E' est strictement positive sur l'intervalle [0 ; 16].
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction E sur l'intervalle [0 ; 16].

2) **a)** Montrer que l'équation $E(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[0\,;\,16]$. Donner la valeur de α en arrondissant au dixième.

b) Dresser le tableau de signes de la fonction E sur l'intervalle $[0\,;\,16]$. Interpréter les résultats obtenus au regard des deux formules proposées par la compagnie aérienne.

Exercice 42

Partie A

Soit f la fonction définie sur [0 ; 10] par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1) Étude des variations de la fonction f

a) En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

b) En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.

2) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1) Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?

2) Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

a) Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.

b) Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.

c) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 10].

3) **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 10].

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

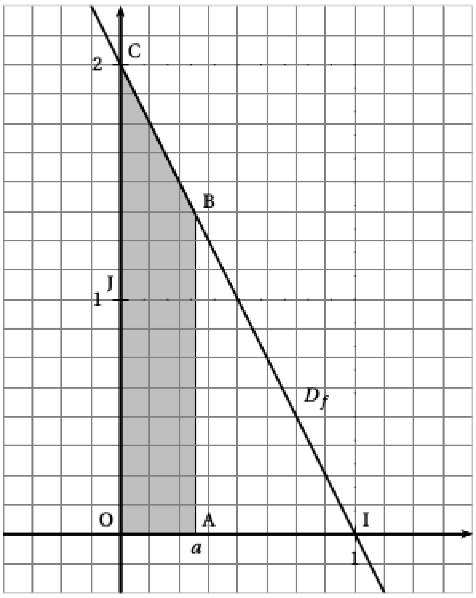
4) En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

Exercice 43

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = 2 - 2x.$$

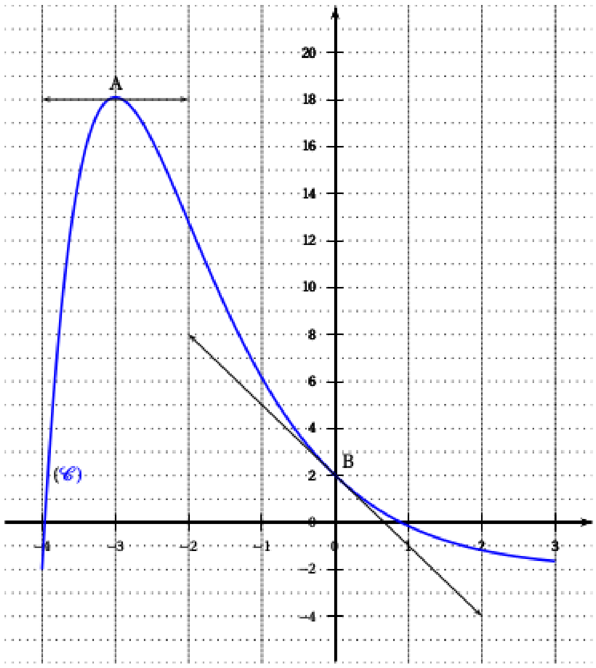
On a tracé ci-dessous la droite D_f, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
Le point C a pour coordonnées (0 ; 2).
Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\ ;\ 0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$.
Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.
Déterminer la valeur exacte de a, puis une valeur approchée au centième.



Exercice 44

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $(\mathcal{C})$.

Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

1) Par lecture graphique, déterminer :

a) $f'(-3)$;

b) $f(0)$ et $f'(0)$.

2) La fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$.

b) À l'aide des questions 1. b. et 2. a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 2 \\ 1-b & = & -3 \end{array}\right.$$

c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

1) Justifier que, pour tout réel x de $[-4\ ;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\ ;\ 3]$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\ ;\ 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

3) On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.

a) Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

b) Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	F(x) := $-2x + (-x - 5) * \exp(-x)$	
	//Interprète F	
	// Succès lors de la compilation F	
		$x \mapsto -2 * x + (-x - 5) * \exp(-x)$
2	derive $(F(x))$	
		$-\exp(-x) - \exp(-x) * (-x - 5) - 2$
3	simplifier$(-\exp(-x) - \exp(-x) * (-x - 5) - 2)$	
		$x * \exp(-x) + 4 * \exp(-x) - 2$

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

Exercice 45

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

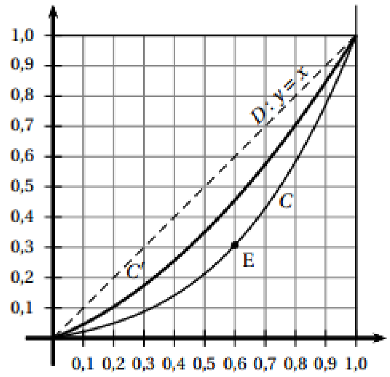
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

Exercice 46

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B. Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle [0 ; 1] par :
$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$ et
$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$.
On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1) Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2) Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

Exemple : pour la courbe C, le point E(0,60 ; 0,3072) signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

- **a)** Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
- **b)** Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?
- **c)** Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

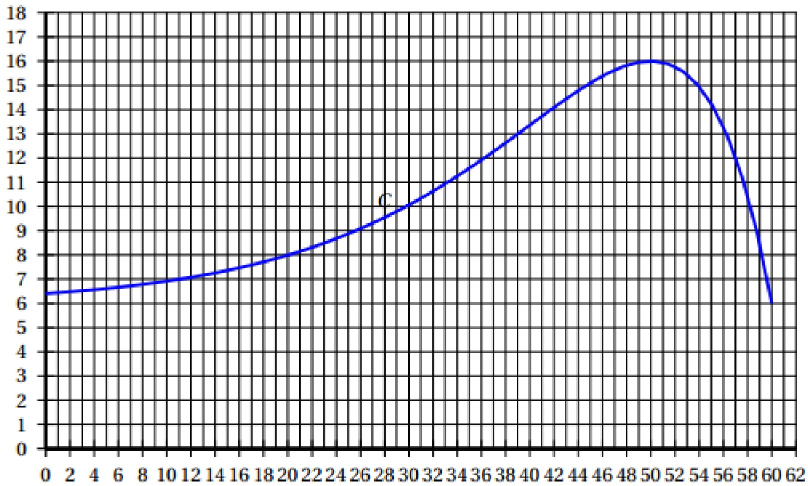
3) Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

- **a)** Montrer que $c_u = 0,2$.
- **b)** En observant que $\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\frac{c_v}{2}$ en termes d' aires.
- **c)** En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.
- **d)** Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

Exercice 47

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 60].
On donne, ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction P.



Partie A

À partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

1) En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de P.

2) Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.

3) Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation $P(x) = 10$.

4) On note A le nombre $\displaystyle\int_0^{10} P(x)\,\mathrm{d}x$; choisir l'encadrement qui convient pour A.

$0 < A < 60$ $\quad$ $60 < A < 70$ $\quad$ $6 < A < 7$ $\quad$ $10 < A < 11$

Partie B

La fonction P est définie sur l'intervalle [0 ; 60] par :

$$P(x) = 6 + (60 - x)\mathrm{e}^{0,1x-5}.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les résultats suivants :

Actions	**Résultats**
definir(P(x)=6+(60-x)*exp(0,1*x-5))	x ↦ 6+(60-x)*exp(0.1*x-5)
deriver(P(x),x)	(-0.1*x+5)exp(0.1*x-5)
deriver(deriver(P(x),x),x)	(-0.01*x+0.4)*exp(0.1*x-5)

1) **a)** Étudier le signe de $P'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 60] où P' est la fonction dérivée de P.

b) En déduire les variations de la fonction P sur l'intervalle [0 ; 60] et vérifier que la fonction P admet, sur cet intervalle, un maximum valant 16.

2) Montrer que l'équation $P(x) = 10$ a une solution unique x_0 sur l'intervalle [0 ; 40].
Donner une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

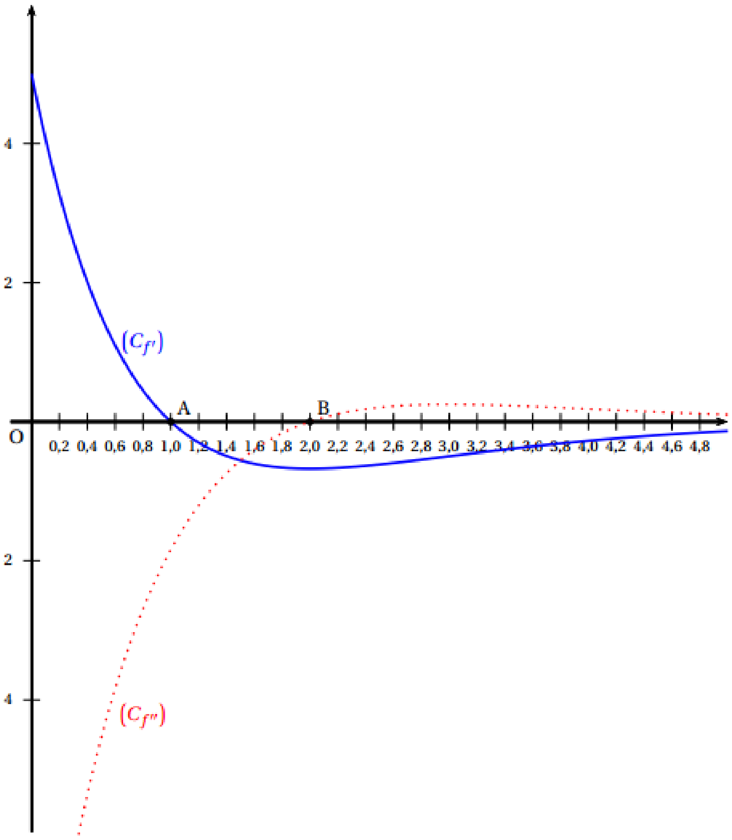
3) En exploitant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, étudier la convexité de la fonction P.

Exercice 48

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

On a représenté ci-dessous la courbe $(C_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(C_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
Le point A de coordonnées $(1\,;\,0)$ appartient à $(C_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2\,;\,0)$ appartient à la courbe $(C_{f''})$.



1) Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.

2) Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.

3) La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}.$$

1) Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

2) Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,5]$ par $F(x) = (-5x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,5]$.

3) Déterminer alors la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 49

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^2 \ln(x)$$

sur [0,2 ; 10] et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan.
Le but de cet exercice est de prouver que la courbe (C_f) admet sur [0,2 ; 10] une seule tangente passant par l'origine du repère.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1) Montrer que pour $x \in [0,2\ ;\ 10],\ f'(x) = 2x(2\ln(x) + 1)$.

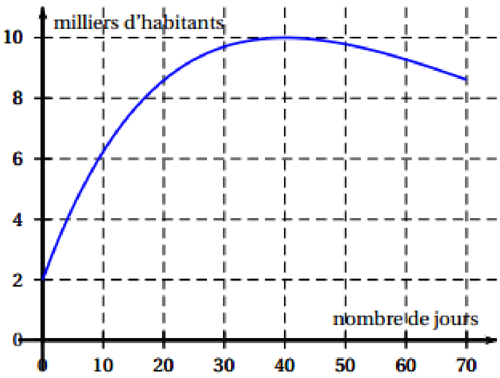
2) Soit a un réel de [0,2 ; 10], montrer que la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse a a pour équation $y = 2a(2\ln(a) + 1)x - 2a^2(\ln(a) + 1)$.

3) Répondre alors au problème posé.

Exercice 50

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique

1) **a)** Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.

b) La commune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant ?

2) Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$f(x) = 2 + 0,2x\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

1) Calculer $f(9)$ puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324 890 litres.

2) **a)** Démontrer que $f'(x) = (0,2 - 0,005x)\mathrm{e}^{-0,025x+1}$ où f' est la fonction dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,70]$.

c) En déduire la date de la consommation d'eau maximale.

Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$g(x) = 55f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$G(x) = 110x - (440x + 17\,600)\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

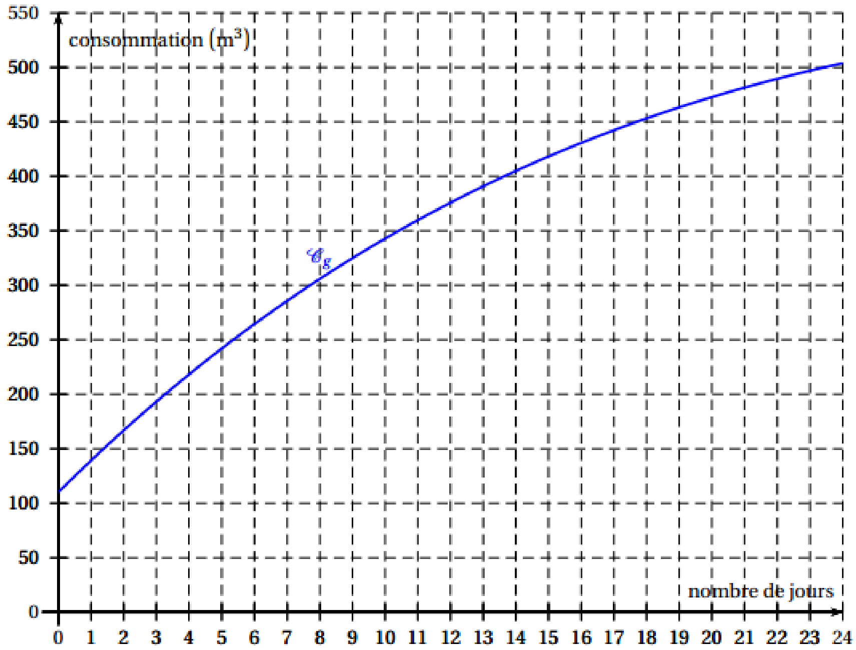
On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10e au 20e jour exprimée en m^3.

1) En l'illustrant sur la courbe $\mathcal{C}_g$ de l'**annexe** à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.

2) En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour.

ANNEXE

Annexe à l'exercice 4 à rendre avec la copie



Exercice 51

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 10], $f'(x) = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$.

2) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 ; 10].
Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [0 ; 10] et déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

4) On admet que la fonction F définie sur [0 ; 10] par

$$F(x) = (-2x+3)\mathrm{e}^{-x+4} + 20x$$

est une primitive de f sur [0 ; 10].
Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ; 10]. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1) Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?
Quel est ce bénéfice maximal en euros ?

2) À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?

3) Interpréter le résultat de la question 4 de la partie A.

Exercice 52

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle [1 ; 7] par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur [1 ; 7].

1) Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 7] :

a) Calculer $f'(x)$.

b) Calculer $f''(x)$.

2) Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine. On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note c la fonction définie sur [1 ; 7] représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de [1 ; 7] :

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur [1 ; 7]. On note c' sa fonction dérivée.

1) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 7], on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}.$$

2) **a)** Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle [1 ; 7].

b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

3) On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle [1 ; 7] par :

$$\Gamma(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 24x + 1 + 48\ln x.$$

a) Montrer que Γ est une primitive de c sur l'intervalle [1 ; 7].

b) Calculer la valeur moyenne μ de c sur l'intervalle [1 ; 7]. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice 53

Exercice 54

Exercice 55

Exercice 56

Exercice 57

Exercice 58

Exercice 59

Exercice 60

Exercice 61

Exercice 62

Exercice 63

Exercice 64

Exercice 65

Exercice 66

Exercice 67

Exercice 68

Exercice 69

Exercice 70

Exercice 71

Exercice 72

Exercice 73

Exercice 74

Exercice 75

Exercice 76

Exercice 77

Exercice 78

Exercice 79

Exercice 80

Exercice 81

Exercice 82

Exercice 83

Exercice 84

Exercice 85

Exercice 86

Exercice 87

Exercice 88

Exercice 89

Exercice 90

Exercice 91

Exercice 92

Exercice 93

Exercice 94

Exercice 95

Exercice 96

Exercice 97

Exercice 98

Exercice 99

Exercice 100