Fiche 3: nombres complexes

Démonstration 1 :

Prérequis : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

1. Démontrer que $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
2. En déduire que $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.
3. Démontrer que $\arg(z^n) = n \arg(z)\ [2\pi]$ avec $n \geq 1$.

Démonstration 2 :

Soit $G(z_G)$ le barycentre des points $(A_i(z_{A_i}), \alpha_i)$ avec $1 \leq i \leq n$ et $\sum\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i \neq 0$.

Démontrer que $\boxed{z_G = \dfrac{\sum\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i z_{A_i}}{\sum\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i}}$

Probléme :

On se place dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, et on appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points distincts de Γ tels que le triangle ABC ne soit pas rectangle.

Résultats préliminaires.

1. Soit C' l'image du point O dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB).
   Démontrer que C' est distinct de O, puis déterminer le nature du quadrilatère $AOBC'$.
   Démontrer que l'affixe de C' est $a + b$.
2. On considère le point D tel que $OC'DC$ soit un parallèlogramme (éventuellement aplati).
   (a) A quelle condition portant sur le triangle ABC les points O, C', D et C sont-ils alignés ?
   (b) Démontrer que (CD) est une hauteur du triangle ABC.
3. Démontrer que l'affixe d du point D est $d = a + b + c$.
   En déduire que (AD) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABC.

Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.

1. On considère le milieu commun C_1 des segments $[AB]$ et $[OC']$, le milieu commun Ω des segments $[OD]$ et $[CC']$ et enfin le milieu C_2 du segment $[CD]$.
   Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{C_1\Omega}$ et $\overrightarrow{\Omega C_2}$. En déduire que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en Ω passe par les points A_1, B_1 et C_1 des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ du triangle ABC, par les milieux respectifs A_2, B_2 et C_2 des côtés $[AD]$, $[BD]$ et $[CD]$ et par les points A_3, B_3 et C_3 , pieds des hauteurs du triangle ABC passant respectivement par A, B et C.
   Le cercle précédent est appelé cercle d'Euler.
2. Montrer que l'homotétie h de centre D et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle ABC en le cercle circonscrit du triangle ABC.
3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'affixe du point G ; en déduire que les points O, Ω, D et G sont alignés.
   Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée droite d'Euler du triangle ABC
   Que se passe-t-il si le triangle est équilatéral ?