Intégration et calcul de primitives

Exercice 1 : Démontrer que $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Exercice 2 :

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ possède des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déterminer l'unique primitive de f qui s'annule en 2.
2. Démontrer que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle ne s'expriment pas toutes sous la forme :

$$F_a : x \mapsto \int_a^x e^t \mathrm{d}t$$

Exercice 3 :

1. Démontrer que si f est une fonction continue, positive ou nulle sur un intervalle $[a,b]$ et si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est constante égale à 0 sur $[a,b]$.
2. Soit f une fonction continue et positive ou nulle sur $[a,b]$, on suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Démontrer que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 4 : Démontrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 5 : Calculer l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = -1$, $x = 2$ et les courbes représentatives des fonctions suivantes : $f : x \mapsto -x^2$ et $g : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormal, on précisera les asymptotes éventuelles.
2. Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par C_f et les droites d'équations $y = 2x - 3$, $x = 1$ et $x = \lambda$ pour $\lambda > 1$.
3. Étudier la limite éventuelle de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.
4. Reprendre l'exercice avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$.

Exercice 7 : Fonction définie par une intégrale

Soit G la fonction définie par : $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de G.
2. Démontrer que G est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
3. Calculer G', que peut-on en déduire ?

Exercice 8 : Cas général

1. Soient f une fonction continue sur un intervalle I, u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle J, à valeurs dans I. Démontrer que la fonction G définie sur J par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur J et déterminer sa dérivée.

2. Application : démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 : Étudier la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 10 : Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\mathrm{d}t$. On étudiera la parité, les variations et on démontrera que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 11 : Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$. Démontrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Calculer f' et étudier les variations de f.
2. Pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln 2$ et $x^2 \ln 2$. Déterminer les limites de f en 0, 1 et $+\infty$.
3. On prolonge f par continuité en 0 et 1. On note g ce prolongement. Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 : Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 13 : Démontrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 : Démontrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 : Démontrer que les suites suivantes convergent et préciser leur limite :

1. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$.
2. $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n}$.
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 16 : On considère la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \dfrac{t^n}{2} \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 17 : Calculer $\displaystyle\int_0^2 (t - t^2[t])\mathrm{d}t$.

Exercice 18 :

1. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, démontrer que l'on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déduire de la question 1. que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$$

3. En déduire que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 19 :

1. Démontrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1+x) - x| \leqslant x^2$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 20 :

1. Démontrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\arcsin x + \arccos x$ est égal à une constante dont on précisera la valeur.
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\mathrm{d}t$.
   a. Démontrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. Démontrer que f est π-périodique et paire sur $\mathbb{R}$.
   c. Démontrer que f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$. Déterminer cette constante.

Exercice 21 : Lemme de Lebesgue
Démontrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 22 : Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Minkowski

1. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. Démontrer que la fonction $\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2\mathrm{d}t$ est une fonction polynomiale toujours positive. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t\right)$$

2. Démontrer que si f et g sont continues sur $[a,b]$, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, f et g sont proportionnelles.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 23 : Première formule de la moyenne

1. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ (avec $a<b$), la fonction g étant positive. Démontrer que si $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ alors on a :

$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

2. En déduire que si f est continue alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 24 : Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[0,1]$ telles que :

$$f \geqslant 0,\ g>0,\ \int_0^1 f = 1 \text{ et } \int_0^1 fg > 0$$

1. Démontrer que, pour tous a et x réels strictement positifs, on a :

$$\ln x \leqslant \frac{x}{a} + \ln a - 1$$

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln(g(t))\mathrm{d}t \leqslant \ln\left(\int_0^1 fg\right)$.

Exercice 25 : Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $[0,1]$. On suppose de plus que $f(b)=1$ et l'on définit la suite de terme général :

$$I_n = \int_a^b (f(t))^n\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Démontrer que (I_n) est positive, en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.

3. Pour tout $x \in]a, b[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que : $0 \leqslant I_n \leqslant (x-a)(f(x))^n + (b-x)$.
   Indication : utiliser la relation de Chasles.
4. En déduire que, pour tout $x \in]a, b[$, on a : $0 \leqslant \ell \leqslant b - x$.
5. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 26 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 27 :

1. Calculer $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \mathrm{d}x$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$.
3. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur des intervalles à préciser :
   a. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
   b. $x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 28 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. Pour $a > 1$, $\quad I = \displaystyle\int_{0}^{\ln a} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 29 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^3 x \mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \mathrm{d}x$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad K = \displaystyle\int_{0}^{x} \sin^2 x \cos^2 x \mathrm{d}x$.

Exercice 30 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'intégrations par parties :

1. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} t \arctan t \mathrm{d}t$.
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t^3 \sin 2t \mathrm{d}t$.
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x e^x \mathrm{d}x$, (de deux façons différentes).
4. $L = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 31 : Calculer les intégrales suivantes en faisant apparaître une exponentielle complexe :

1. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (x-3)\cos x e^{2x}\mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x e^{-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 32 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$.
2. $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}\mathrm{d}x$.
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\mathrm{d}x$.

Exercice 33 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\mathrm{d}t$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ $(t = a\sin u)$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ $(u = \tan \frac{x}{2})$.
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$ $(u = \pi - t)$.

Exercice 34 : Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que : $f(1) = f'(1) = 0$.
Démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 35 : Pour tout entier naturel n on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}\mathrm{d}t$$

1. Déterminer si la suite (I_n) a une limite, et si oui, laquelle.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire en fonction de n le terme général de la suite (I_n).
4. En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 36 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on définit : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^n t\mathrm{d}t$.

1. Calculer $F_1(x)$.
2. Démontrer que : $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)$.
3. Soit $I_n = F_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Démontrer que la suite (I_n) décroît et converge.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n).
5. Démontrer que pour tout n :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2}$$

6. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 37 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\mathrm{d}t$.

1. Calculer J_0.
2. Calculer J_1 en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$.
3. Démontrer, en intégrant par parties que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$J_n = \frac{2n}{2n+3}J_{n-1}$$

   Indication : utiliser la relation $(1-t)^{\frac{3}{2}} = (1-t)\sqrt{1-t}$.
4. Démontrer que la suite (J_n) converge. Quelle est sa limite ?